BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

Ph. 2736.

8° Math. Un 176

Scherffer

Mathesis. Opera varia mathesin illustrantia 87.

R

Beyträge zur Mathematik.

Von

Karl Scherffer,

Priester, der Philosophie Doctor und öffentlich. ordent. Lehrer der höhern Mathemat. an der Universität zu Wien.

WIEN,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1781.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Kaiserl. Königl. Kämmerer

Grafen

Franz Kinsky,

Generalfeldwachtmeister,

Obrist-Innhaber eines Regiments zu Fuß,

und

Director der Kaiserl. Königl. theresianischen

Militärakademie.

Herr General!

Schon Ihre Bestimmung, würdigster Herr General, hat nicht allein eine vollkommene Einsicht in alle die mathematischen Wissenschaften, welche eine Militärperson bilden und zieren, sondern auch einen darinnen ungezweifelt erhaltenen Ruhm zum Grunde; und so groß der Umfang von jenen, so glänzend muß dieser gewesen seyn, um in der Auswahle, deren ganze Wichtigkeit dem so scharfsehenden Auge vorleuchtete, das Urtheil des Monarchens auf Sie zu lenken. Ich kann Ihnen also nicht mehr sagen, als was Ihr

erhabener Charakter der ganzen Welt vor Augen leget; und da Sie mich Ihrer mir so theuren Gewogenheit würdigen, ist es bey mir eine Pflicht, ein öffentliches Zeugniß meiner Hochachtung abzulegen; bey Ihnen eine Großmuth dasselbe anzunehmen.

gehorsamst ergebenster

K. Scherffer.

I.

Abhandlung

über

Eine Methode auf der Oberfläche einer bey dem Pole zusammen gedrückten Elliptoide Perpendikulärhöhen und Längen zu messen.

Vorbericht.

Die Abhandlung über die geographische, und orthographische Projektion einer bey dem Pole zusammen gedrückten Elliptoide, die ich A. 1778. zum Drucke gab, both mir Gelegenheit zur gegenwärtigen Untersuchung dar. Denn da ich mir in derselben den wahren Entwurf der Meridiane und Parallelcirkel zu bestimmen (ob schon in Verfertigung der Landcharten niemand davon Gebrauch machen würde), wie auch, ob der Unterschied der Meridian- und Parallelgrade in einer Sphäroide von jenen in einer Sphäre angemerkt zu werden verdiente, zu untersuchen vorgenommen hatte, mußte mir die Verschiedenheit der Methode auf der Oberfläche einer Elliptoide Längen, und Perpendikulärhöhen zu messen, von der Art diese auf einer Sphäre zu bestimmen, alsogleich in die Augen fallen. Vielleicht wird diese Untersuchung das Verfahren aller derjenigen rechtfertigen, welche die unglaubliche Mühe verschiedene Meridiangrade abzumessen auf sich genommen haben.

Ich setze hier voraus, meine Leser seyen vollkommen von allen den Kunstgriffen unterrichtet, derer man sich bey dergleichen Messungen bedient. Bey dem größten Theile der geometrischen Operationen pflegt man die Oberfläche der Erde als Kugelförmig anzusehen; man bedient sich der Winkel bey dem Mittel-

punkte, die man durch die genommenen Längen als so viele Cirkelbögen mißt; auf gleiche Art findet man die Erhöhung, oder die Erniedrigung über, oder unter dem Gesichtskreise einer Station gegen der andern: mit einem Worte, man sucht die sphäroidische Figur durch die Art auf einer Sphäre zumessen. Und wie konnte man wohl anderst zu Werke gehen, da man annoch im Zweifel stund, ob die Figur der Erde elliptoidisch sey?

Gesetzt aber, man versichere, daß der Gebrauch der sphärischen Figur nicht den geringsten Einfluß in die Länge der gemessenen Meridiangrade habe, durch derer Vergleich man das Verhältniß der Erdachse zu dem Durchmesser des Aequators bestimmet, so ist doch dieses für mich nicht hinlänglich, der ich mich entschlossen habe, mich der Wahrheit durch die Methode selbst, auf der Oberfläche einer Elliptoide Längen, und Perpendikularhöhen zu messen, zu überführen. Meine Leser werden demnach sie immer mit jener vergleichen, der man sich bey einer Sphäre gebrauchen kann.

Ich läugne zwar nicht, daß wenn man diesen Weg ergreift, man auf Berechnungen, die in sich selbst sehr leicht, wegen Weitläuftigkeit aber ungemein verdrüßlich werden, aufstößt; jedoch hat man das Vergnügen überzeugt zu werden, daß man in den meisten Umständen, die bey Ausmessungen vorkommen, derselben überhoben sey.

Ueber dieses habe ich mir es zum Gesetze gemacht, mich nur solcher Grundsätze zu bedienen, welche dem größten Theile der Leser bekannt

kannt sind; indem man aber in den wenigsten Büchern, die die Kegelschnitte behandeln, verschiedene Durchschnitte, die man in einer Elliptoide machen kann, betrachtet, wird man es mir zu Gute halten, wenn ich im ersten Abschnitte alle die Sätze zusammen nehme, von den man in der Auflösung der nachfolgenden Aufgaben Gebrauch machen kann. In dem zweyten Abschnitte werden die Aufgaben selbst vorgetragen, welche zu dem gegenwärtigen Stoffe nothwendig sind. Im dritten endlich wird die Reduktion eines sphäroidischen Dreyeckes auf den Horizont, und etwas von den elliptoidischen Winkeln vorkommen. Und dieses ist der Innhalt gegenwärtiger Abhandlung.

§. I.

Verschiedene Sätze, auf die sich die Auflösung nachfolgender Aufgaben bezieht.

1. I. Satz. Wenn eine Elliptoide APBQ (1 Fig. 1 Taf.) durch was immer für einen Plan geschnitten wird, wird der Schnitt entweder einen Cirkel, oder eine Ellipse gestalten. 1 Fig. 1 Taf.

Beweis. Indem die Elliptoide durch die Umdrehung eines Meridians um seine Achse entsteht, ist 1 klar, daß eine jedwede Ordinate MG, CB bey dieser Umdrehung einen Cirkel beschreibt; und wenn demnach der schneidende Plan auf die Achse senkrecht geht, muß der Durchschnitt einen Cirkel geben. 2. Sieht man, daß aus allen Meridianen der Elliptoide jederzeit einer, als APBQ, seyn muß, auf dessen Plan der schneidende Plan perpendikulär ist. Hieraus aber folgt, daß man sich jederzeit zwey Parallelcirkel, welche auf eben

denselben Meridian senkrecht stehen, und durch welche der schneidende Plan geht, vorstellen kann, zum Beyspiele FhHG, AiLB, also zwar, daß die gemeinschaftlichen Durchschnittslinien kh, ci, als Ordinaten sowohl der zwey Cirkel, als auch des Schnittes $dhie$, DHLE müßen angesehen werden. Es ist bekannt, daß wenn zwey Parallellinien FG, AB in einem Kegelschnitte, als in dem Meridiane APBQ, durch eine dritte Linie de, oder DE, durchschnitten werden, die Produkte aus den Theilen der Parallellinien zu den Produkten aus den Theilen der dritten Linie, in einem unveränderlichen Verhältnisse stehen. Man hat also $Fk \times kG : Ac \times cB = dk \times ke : dc \times ce$; oder $FK \times KG : AC \times CB = DK \times KE : DC \times CE$. Nun ist vermög der Eigenschaft des Cirkels $Fk \times kG = \varkappa h^2$, und $Ac \times cB = ci^2$: und es ist demnach auch $ah^2 : ci^2 = dk \times ke : dc \times ce$, das ist, die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Produkte der Abscissen, folglich muß der Schnitt $dhie$, oder DHLE eine Ellipse seyn. W. zuerw. w.

2. II. Satz. Zwey parallele Schnitte, die auf die Achse nicht perpendikulär sind, geben zwey ähnliche Ellipsen.

Beweis. Wir wollen setzen, die Schnitte $dhie$, DHIE seyen parallel, und zugleich auf einen Meridian APBQ perpendikulär. Man theile de in $\varkappa$, und DE in C gleich ab, ziehe durch $\varkappa$ und C einen Durchmesser des Meridians $\alpha C \beta$, und schneide noch einmal die Elliptoide durch eine auf eben den Meridian senkrechte Fläche $\alpha q I \beta$; so hat man im Ansehen des Meridians $\alpha\varkappa \times \varkappa\beta : \alpha C \times C\beta = d\varkappa \times \varkappa e\ (= d\varkappa^2) : DC \times CE\ (= DC^2)$; im Ansehen der Ellipse $\alpha q I \beta$ aber $\alpha\varkappa \times \varkappa\beta : \alpha C \times C\beta = \varkappa q^2 : CI^2$, folglich auch $d\varkappa^2 : DC^2 = \varkappa q^2 : CI^2$, oder $d\varkappa : DC = \varkappa q : CI$. Da nun $\varkappa d$, CD die Hälfte der kleineren Achsen, und $\varkappa q$, CI die Hälfte der größeren für die Ellipsen $dhqe$, DHIE

sind,

sind, und diese in einem gleichen Verhältnisse stehen, ist einleuchtend, daß diese Ellipsen ähnlich sind. W. zubew. w.

3. **Erklärung.** Es sey (2 Fig. 1 Taf.) CPB ein Quadrant einer Ellipse; MN eine Normale auf M, *t*T die Tangente. Wenn man sich vorstellet, *t*T werde also um den Punkt M herumgedrehet, daß sie immer auf MN senkrecht verbleibe, so wird MN auf die Fläche, die durch die Umdrehung der Tangente entsteht, perpendikulär seyn. Nun drehe man den Quadranten PMB sammt der Normale, und der durch die Tangente gestalteten geraden Fläche, um die Halbachse PC, so entsteht 1 daraus die halbe Elliptoide APBD; 2 beschreibt der Punkt M einen Parallelcirkel $Mm\mu$; 3 (Wenn *e*EF*f* einen Theil der aus der Bewegung der Tangente entstandenen Fläche vorstellet) wird diese Fläche in einem jeden Punkte des Parallels die Oberfläche der Elliptoide berühren. Denn da PMB in P*m*D übertragen wird, kömmt der Plan *e*EF*f* in $\beta\alpha\phi\varepsilon$, die Tangente des Meridians *t*MT in $\delta m\vartheta$, die Normale MN in *mn*, und bleibt immer auf $\beta\alpha\phi\varepsilon$ perpendikulär. 4. Indem durch einen jedweden Punkt *m* der Oberfläche der Elliptoide unendlich viele Ellipsen gehen können, und auf eine jedwede eine Tangente in eben dem Punkte *m* kann gezogen werden, müßen alle die Tangenten in dem Plane $\beta\alpha\phi\varepsilon$ liegen. Denn so fern dieser Plan was immer für eine Neigung gegen die Normale *mn* bekäme, müßte er nothwendig die Elliptoide schneiden, folglich würden auch die geraden Linien, die auf denselben durch *m* gehen, die Ellipsen, welche ebenfalls durch *m* können beschrieben werden, schneiden. 2 Fig. 1 Taf.

Aus diesem erhellet, daß der Berührungsplan einer Elliptoide auf die Normale des Meridians, der durch den Berührungspunkt geht, senkrecht stehen müße.

4. Zusatz. Der kürzeste Weg aus einem gegebenen Punkte L bis an die Oberfläche der Elliptoide ist ein Theil der Normale L*m* des Meridians, in dessen Plane der Punkt L liegt. Ich nehme dieses als bekannt an, indem es in der Differentialrechnung gewöhnlicher Weise bewiesen wird. Um also diesen Weg zu bestimmen, darf man nur durch die Achse der Elliptoide, und den Punkt L einen Plan ziehen, und aus L auf den Meridian P*m*D die Normale *nm*, welche durch L geht, beschreiben.

5. Erklärung. Wenn die Tangenten zweyer Ellipsen in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte sich unter einem rechten Winkel schneiden, sind ihre Bögen einer auf den andern perpendikulär Denn die Richtung einer krumen Linie in einem jedweden Punkte ist die Richtung der Tangente.

6. III. Satz. Wenn der Plan einer Ellipse durch die Normale der andern geht, und ihre Plane auf ein ander senkrecht stehen, schneiden sich ihre Tangenten unter einem rechten Winkel, und eine aus den Normalen wird auf den Berührungsplan perpendikulär.

3 Fig. 1 Taf. Beweis. Es sey in der Oberfläche der Elliptoide GMH (3 Fig. 1 Taf.) eine Ellipse, MO eine Normale auf den Punkt M. Man errichte in O eine Perpendikulärlinie auf den Plan GMH welche in S auf die Oberfläche der Elliptoide stößt. Man schneide die Elliptoide durch einen Plan, der durch S, O und M geht, so wird dieser auf den Plan GMH senkrecht stehen. Die Tangente in M der Ellipse GMH ist ohne Zweifel auf ihre Normale MO perpendikulär, und liegt in eben dem Plane der Ellipse GMH, folglich, da auf diesen Plan der Plan SMO senkrecht steht, muß eben diese Tangente in M der Ellipse GMH auf eine jede Linie, die in dem Plane SMO durch M gezogen wird, senkrecht stehen.

hen. Nun aber liegt die Tangente in M der Ellipse SM in dem Plane SMO; es muß also auch die Tangente in M der Ellipse GMH auf die Tangente in M der Ellipse SM perpendikulär seyn. W. das erste w.

Es ist klar, daß die Normale MR der Ellipse SM in eben dem Plane liegt, im welchen sich MO, die Normale der Ellipse GMH, befindet. Es ist nun zu beweisen übrig, daß im gegenwärtigen Falle MR auf den Plan der Tangenten perpendiculär sey. ABCD (4 Fig. 1 Taf.) stelle den Berührungsplan vor, AB die Tangente, und MG die Normale der Ellipse GMH; DC die Tangente, MS aber die Normale der Ellipse SM der vorigen Figur, so muß BM nicht allein auf MC, sondern auch auf MG perpendikulär seyn; und da SM in eben dem Plane liegt, im welchen GM sich befindet, steht BM auf den ganzen Plan der Linien SM, GM, CM perpendikulär, und macht mit MS einen rechten Winkel. Vermög der Voraussetzung aber macht auch SM (die Normale der Ellipse SM) mit ihrer Tangente MC einen rechten Winkel; das ist, SM steht auf zwey Linien CM, BM, die in dem Plane ACBD durch M gehen, perpendikulär, und muß demnach auf den selben senkrecht stehen. W. das zweyte w. 4 Fig. 1 Taf.

7. I. Zusatz. Der Berührungsplan der Elliptoide in M ist auf die Normale des durch M gehenden Meridians PMD senkrecht (3 Fig. 1 Taf.); und da wir im gegenwärtigen Satze dargethan haben, daß eine aus den Normalen MO, oder MR, auf eben den Plan perpendikulär sey, folgt nothwendig, daß eine aus den Normalen (im gegenwärtigen Falle MR) mit der Normale des Meridians PMD eintreffe, welche demnach der gemeinschaftliche Durchschnitt der Plane SMO, PMDC wird. 3 Fig. 1 Taf.

8. II. Zusatz. Der Bogen SM ist also auf den Bogen GMH in dem Punkte M perpendikulär; und damit

ein Bogen auf den andern senkrecht stehe, ist nicht genug, daß die Plane zweyer Ellipsen sich unter einem rechten Winkel schneiden, sondern es wird auch erfordert, daß ihre Tangenten im Durchschnittspunkte eine auf die andere perpendikulär sey. Wenn man aus M eine andere Linie M*o* auf dem Plane GMH zieht, in *o* auf GMH einen Perpendikel *os* errichtet, und die Elliptoide durch den Plan *s*M*o* schneidet, wird zwar der Plan *s*M*o* auf den Plan GMH perpendiculär seyn, aber der Winkel, den die Bögen *s*M, GM enthalten, ist kein rechter, indem die Tangente der Ellipse GMH nicht allein in diesem Plane, sondern auch in dem Berührungsplane liegt; wie auch die Tangente der Ellipse *s*M sich nicht nur in dem Plane *s*M*o*, sondern auch in dem Berührungsplane befindet; und in diesem Berührungsplane schneiden sie sich unter einem schiefen Winkel.

9. III. Zusatz. Indem der Plan einer Ellipse GMH nothwendig auf einen Plan eines Meridians perpendikulär ist, als zum Beyspiele APB, muß dieser in H und G auf die Ellipse perpendikulär stehen, oder die Bögen PH, HM; PG, GM machen bey den Scheidelpunkten der kleineren Achse rechte Winkel. Denn die Normalen in G und H der Ellipse GMH sind in der kleineren Achse GH, und liegen also in dem Plane des Meridians, im welchen auch die Normalen in G und H des Meridians sich befinden.

5 Fig. 1 Taf. 10. Vorrichtung. Die Elliptoide APBQ (5 Fig. 1 Taf.) wird durch den Plan GMH also geschnitten, daß dieser auf den Plan des Meridians APBQ senkrecht stehe, und die kleinere Achse GH der Ellipse GMH von der Achse PQ der Elliptoide in K unter einem Winkel PKH durchschnitten werde. MO ist eine Normale in M der Ellipse GMH; OS in dem Plane des Meridians APB auf den Plan GMH perpendikulär, und die El-

liptoide wird durch den Plan SMO gleichfalls durchschnitten. Durch M wird auch ein anderer Meridian PMEQ gezogen, und ML ist seine Normale in M, welche, da sie verlängert wird, die Achse PQ in *g* schneidet. Dieses gesetzt, ist 1 klar, daß wenn man SO verlängert, sie irgendwo die Achse schneiden müße. 2. Daß, indem die Normale MO der Ellipse GMH nicht mit der Normale M*g* des Meridians eintreffen kann, als die in einem anderen Plane liegt, die Ellipse SM mit dem Meridiane PM eine gemeinschaftliche Normale M*g* haben muß (7). 3. Das SO, PQ, M*g* sich in dem nämlichen Punkte *g* schneiden. Denn der Plan der Ellipse SM geht zugleich durch S*g*, und durch die Normale M*g*; und sowohl eine, als die andere haben mit einander, und mit der Achse PQ nur einen gemeinschaftlichen Punkt, nämlich *g*. Man kann also aus *g*, als dem Mittelpunkte, mit einem beliebigen Halbmesser *gc* in dem Plane des Meridians PME einen Cirkelbogen *ba* beschreiben, wie auch in dem Plane des Meridians APB einen andern *bc*; und endlich den dritten Bogen *ca* in dem Plane der Ellipse SM, und man hat ein sphärisches Dreyeck *abc*. In diesem Dreyecke ist die Seite *cb* (das Maaß des Winkels S*g*P) für die nämliche Ellipse GMH beständig, wo immer der Punkt O hinfällt, und wird nur der Abstand des Punkts *g* von K verändert. Ebenfalls ist klar, daß der Winkel *acb* = MOH; denn sowohl MO, als HO ist auf S*g* in O perpendikulär; und da S*g* der gemeinschaftliche Durchschnitt der Plane SM und SPH ist, mißt sowohl MOH, als *acb* derselben Neigung gegen einander. Den Winkel MLE, den die Normale in M des Meridians PME mit dem Halbmesser EC des Aequators macht, nenne ich die Polhöhe des Punkts M; und da LC*g* jederzeit ein rechter Winkel ist, ist der Winkel P*g*M, oder die

Sei-

Seite *ba* des sphärischen Dreyeckes, das Complement der Polhöhe des Punktes M.

11. IV. Satz. Wenn der Plan GMH den Meridian APB senkrecht schneidet, und die kleinere Achse GH irgendwo ein K durch die Achse PQ der Elliptoide geht; und aus dem Pole P auf GMH ein Meridian gezogen wird, als zum Beyspiele PM, ist allemal 1. der *cos.* der Polhöhe des Punkts M zu den *sin.* des Winkels HOM, den die kleinere Achse der Ellipse GMH mit der Normale in M enthält; wie der *cos.* des Winkels PKH, unter dem PQ und GH sich schneiden, zu dem *cos.* des Winkels PMH, den der Meridianbogen PM mit dem Bogen MH enthält. 2. Der elliptische Winkel PMH ist gegen H allezeit gespitzt, wo nämlich der Scheitelpunkt der kleineren Achse dem Pole P am nächsten ist (wenn nicht der Punkt S zwischen P und H liegt), und wird in G und H ein rechter Winkel. 3. Dieser Winkel PMH ist der kleinste, da der Winkel MOH dem Mitwinkel der Polhöhe des Punkts M gleich wird, und in diesem Falle wird er mit PKH gleich.

Beweis. In dem sphärischen Dreyecke *abc*, steht *sin.* ab : *sin. c* = *sin.* cb : *sin.* a. Nun aber ist *ab* das Maaß des Winkels PgM oder CgL, und CgL ist das Complement des CLg oder MLE, oder der Polhöhe des Punkts M; der Winkel *c* ist = HOM; *cb* mißt den Winkel SgP, oder ist das Komplement des Winkels OKC, oder PKH. Endlich da die Ellipse SM mit dem Meridiane PM die nämliche Normale hat, sind beyde Tangenten der Ellipsen auf sie in M perpendikulär, und ihr Neigungswinkel mißt den Winkel, den ihre Plane selbst enthalten, und da dieser dem sphärischen Winkel *bac* gleich ist, giebt die angeführte Analogie den elliptischen Winkel SMP. Indem nun der Plan der Ellipse

lipſe SM durch die Normale MO der Ellipſe GMH geht, ſteht der Bogen SM auf MH ſenkrecht, folglich iſt SMP das Complement des Winkels PMH. W. das erſte ꝛc.

Wenn S zwiſchen G und P liegt, iſt es einleuchtend, daß PMH jederzeit nur ein Theil des rechten Winkels SMH iſt, folglich ein geſpitzter Winkel; läge aber S zwiſchen P und *, wäre der rechte Winkel SMH ein Theil des ſtumpfen PMH. Endlich wenn M auf H oder G fällt, wird die Ellipſe SM ein Meridian APB, und macht mit der Ellipſe GMH bey H und G einen rechten Winkel (9). W. das zweyte ꝛc.

Wir haben gehabt $cos.\ \text{elev. pol. } M : sin.\ HOM = cos.\ PKH : cos.\ PMH$, mithin $cos.\ PMH = \frac{cos.\ PKH \times sin.\ HOM}{cos.\ \text{elev. pol. } M}$. Im Falle daß S jederzeit zwiſchen P und G liegt, iſt klar, daß PMH irgendwo ein Kleinſtes werde, in dem dieſer Winkel in H und G ein rechter wird, in allen andern Punkten M aber ein geſpitzter. Es iſt aber eben ſo viel, wenn wir ſetzen, PMS werde ein Größtes, und dann wird $\frac{d.\ sin.\ HOM}{cos.\ \text{elev. pol, } M} - \frac{d.\ cos.\ \text{elev. pol. } M \times sin.\ HOM}{(cos.\ \text{elev. pol. } M)^2} = o$ (denn man kann den beſtändigen Winkel PKH unterdeſſen bey Seite laſſen), mithin $d.\ sin.\ HOM \times cos.\ \text{elev. pol. } M = d.\ cos.\ \text{elev. pol. } M \times sin.\ HOM$, oder $\frac{d.\ sin.\ HOM}{sin.\ HOM} = \frac{d.\ cos.\ \text{elev. pol. } M}{cos.\ \text{elev. pol. } M}$. Aus dieſer Gleichung wird $sin.\ HOM = cos.\ \text{elev. pol. } M$. Wir bekommen alſo $cos.\ PMH = cos.\ PKH$, mithin auch $PMH = PKH$. W. das dritte ꝛc.

An-

12. Anmerkung. Der Punkt K, im welchen die kleinere Achse der Ellipse GMH durch die Achse der Elliptoide geht, kann auch außer der Elliptoide in der Verlängerung der Achse PQ seyn; der Satz behält immer seine Richtigkeit.

13. Zusatz. In einem elliptischen Dreyecke, dessen Schenkel zwey Meridianbögen sind, und die Grundlinie eine andere Ellipse, wenn man * dem Pole P einen Meridian auf die Grundlinie perpendikulär zieht, fällt dieser auf die Grundlinie mM in H, wenn die Winkel bey der Grundlinie von gleicher Gattung sind, das ist, beyde gespitzt, oder beyde stumpf, als in dem Dreyecke mPM. Sind aber diese Winkel von ungleicher Gattung, nämlich einer gespitzt, wie in dem Dreyecke $P\mu M$ der Winkel μ, der andere aber stumpf, wie $PM\mu$, so fällt der Perpendikulärmeridian ausser der Grundlinie μM gegen den stumpfen Winkel in H. Und da H der Scheitelpunkt der kleineren Achse der Grundlinie ist; folgt auch, daß wenn die Winkel m, M von gleicher Gattung sind, der Scheitelpunkt der kleineren Achse in der Grundlinie liege; außer derselben aber, wenn sie von ungleicher Gattung sind, und umgekehrt.

6 Fig. 1 Taf. 14. I. Aufgabe. In einer Ellipse APBQ (6 Fig. 1 Taf.) wird nebst den Hauptachsen der Winkel MCB gegeben; man sucht CM, die Hälfte ihres Mitdurchmessers CL, und den Winkel MCL.

Auflösung. Aus dem Mittelpunkte C beschreibe man mit dem Halbmesser CB einen Quadranten GNB, ziehe auf G die Tangente GT, und verlängere CM, bis sie an die Tangente in T stößt. Dann setze man CB : CP = GT : Gt, und suche den Sinus Oo, der der Tangente Gt nach dem Halbmesser CG entspricht, das ist, wenn wir den Winkel MCB = α setzen, CB = a, CP = b, und $a : b = cot.\,\alpha : cot.$

QCB;

OCB; suche man aus *cot.* OCB den Sinus O*o* des Winkels OCG, wie auch den Cosinus des NCB oder α, nämlich N*n*; so wird N*n* (*cos.* α) : O*o* oder M*m* = NC (a) : MC.

Nachdem für den Halbmesser CB der Sinus O*o* = M*m* gefunden, suche man OR, oder seinen Cosinus. Man übertrage OR in CS, ziehe SL auf CB senkrecht, so wird CL der halbe Mitdurchmesser zu CM seyn. Denn da BR × RA = CS^2, ist auch CR^2 = BS × SA, wie man aus den Kegelschnitten weis.

Man hat endlich $SL^2 = \frac{CP^2}{CB^2} \times AS \times SB$, und es ist CS : SL = 1 : *tang.* BCL; da aber MCB gegeben wird, hat man den ganzen Winkel MCL. W. zuf. w.

15. Anmerkung. Gegenwärtige Aufgabe wird durch die zwey folgenden sehr erleichtert.

16. II. Aufgabe. Wenn in einer Ellipse der Winkel BCL gegeben wird, sucht man den Winkel BVL, den die Normale LV mit der größeren Achse enthält.

Auflößung. der Winkel BCL sey = α, BVL = φ. Wenn die Gleichung auf die Ellipse $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{a^2 - x^2}$ ist, hat man CS (x) : SL = 1 : *tang.* α,

und SL : VS $\left(\frac{b^2 x}{a^2}\right)$ = *tang.* φ : 1.

zusammengesetzt wird $x : \frac{b^2 x}{a^2} = a^2 : b^2 = $ *tang.* φ : *tang.* α, und $\frac{a^2}{b^2}$ *tang.* α = *tang.* φ.

Wenn

Wenn φ gegeben wäre, hätte man auch $\frac{b^2}{a^2}$ *tang.* φ $=$ *tang.* α. W. zuf. w.

17. III. Aufgabe. der Winkel LVB $= \varphi$ wird gegeben; man sucht die Abscisse CS, und die Ordinate SL.

Auflösung. Man setze CP $= b$, CB $= a$, CS $= x$, SL $= y$, so steht . . .

$$VS\left(\frac{b^2x}{a^2}\right) : SL\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1 : tang.\varphi,$$

und $\frac{b^4x^2}{a^4} : b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = 1 : (tang.\ \varphi)^2$, oder $b^4x^2 : a^4b^2 - a^2b^2x^2 = b^2x^2 : a^4 - a^2x^2 = 1 : (tang.\ \varphi)^2$; mithin $b^2x^2\,(tang.\ \varphi)^2 = a^4 - a^2x^2$.

Diese Gleichung giebt $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\,(tang.\ \varphi)^2}}$.

Wenn man den Zähler und Nenner mit a dividirt, hat man $x = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\,(tang.\ \varphi)^2}}$

$= \frac{a}{\sqrt{1 + tang.\ \varphi \times \frac{b^2}{a^2}\, tang.\ \varphi}}$. Es ist aber (16) $\frac{b^2}{a^2}$ *tang.* $\varphi = tang.\ \alpha$, und wenn wir setzen *tang.* $\varphi \times$ *tang.* $\alpha = (tang.\ \varrho)^2$, wird $x = \frac{a}{\sqrt{1 + (tang.\varrho)^2}}$

$= \frac{a}{sec.\ \varrho} = a\ cos.\ \varrho$.

Ge-

Gebrauchen wir diesen Werth des x in der Gleichung auf die Ellipse, so haben wir $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2(cos.\,\varrho)^2}$ $= b\sqrt{1 - cos.^2\varrho} = b\,sin.\,\varrho$; und in dem man hat $sin.\,\varphi : 1 = SL : LV = b\,sin.\,\varrho : VL$, wird die Normale $LV = b \times \frac{sin.\,\varrho}{sin.\,\varphi}$. W. zuf. w.

18. I. Zusatz. Der Halbmesser des Krümungscirkels wird demnach $\frac{a^2}{b} \times \left(\frac{sin.\,\varrho}{sin.\,\varphi}\right)^3$; die Subnormale $\frac{b^2 x}{a^2} = \frac{b^2 cos.\,\varrho}{a}$; die Subtangente $= \frac{a(sin.\,\varrho)^2}{cos.\,\varrho} = a\,sin.\,\varrho \times tang.\,\varrho$. Die Tangente $= \sqrt{(b^2(sin.\,\varrho)^2 + a^2(sin.\,\varrho)^2 \times (tang.\,\varrho)^2)} = sin.\,\varrho\sqrt{b^2 + a^2(tang.\,\varrho)^2} = b\,sin.\,\varrho \times \sqrt{(1 + \frac{a^2}{b^2}(tang.\,\varrho)^2)} = b\,sin.\,\varrho\sqrt{(1 + (tang.\,\varphi)^2)}$ $= b\,sin.\,\varrho \times sec.\,\varphi = \frac{b\,sin.\,\varrho}{cos.\,\varphi}$. Man findet endlich $CV = \frac{a^2 - b^2}{a}\,cos.\,\varrho$; und wenn man die Normale bis an die Achse verlängert, wird $CK = \frac{a^2 - b^2}{b} \times sin.\,\varrho$.

19. II. Zusatz. In der I. Aufgabe (14) ward $MCB = \alpha$ gegeben. Wir haben also (16) $tang.\,\varphi = \frac{a^2}{b^2} \times tang.\,\alpha$, und $\frac{b^2}{a^2}(tang.\,\varphi)^2 = (tang.\,\varrho)^2$, und wir finden alsogleich $sin.\,\varrho$ und $cos.\,\varrho$; mithin $CR = a\,cos.\,\varrho$. Indem CM, CL zwey halbe Mitdurchmesser sind, ist $CS^2 = CB^2 - CR^2 = a^2 - a^2(cos.\,\varrho)^2$

$= a^2(\sin.\ \varrho)^2$, $CS = a \sin.\ \varrho$; $SL = y = \frac{b}{a}$
$\sqrt{a^2 - a^2(\sin.\ \varrho)^2} = b \cos.\ \varrho$. Aus diesem haben wir
$CL = \sqrt{a^2(\sin.\ \varrho)^2 + b^2(\cos.\ \varrho)^2} = b \cos.\ \varrho \times$
$\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{\sin.\ \varrho}{\cos.\ \varrho}\right)^2} = b \cos.\ \varrho \sqrt{1 + (tang.\ \varphi)^2}$
$= b \cos.\ \varrho \times sec.\ \varphi = \frac{b \cos.\ \varrho}{\cos.\ \varphi}$; oder auch CL
$= a \sin.\ \varrho \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\cos.\ \varrho}{\sin.\ \varrho}\right)^2} = a \sin.\ \varrho \times$
$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cot.^2 \varrho}$. Es ist aber $\frac{b \cot.\ \varrho}{a} = \frac{b}{a\, tang.\ \varrho}$
und $\frac{b}{a\, tang.\ \varrho} = \cot.\ \varphi$, folglich $CL = a \sin.\ \varrho \times$
$\sqrt{1 + (\cot.\ \varphi)^2} = a \sin.\ \varrho \times cosec.\ \varphi = \frac{a \sin.\ \varrho}{\sin.\ \varphi}$.
Es steht demnach $1 : \sin.\ LCB = \frac{b \cos.\ \varrho}{\cos.\ \varphi} : b \cos.\ \varrho$
$= 1 : \cos.\ \varphi$, oder $1 : \cos.\ LCB = CL : CS$
$= \frac{a \sin.\ \varrho}{\sin.\ \varphi} : a \sin.\ \varrho = 1 : \sin.\ \varphi$. Aus diesem ist
klar, daß $MCL = \alpha + 90^\circ - \varphi$. Man hat auch
$a : b = GT : Gt = \cot.\ \alpha : \cot.\ \varrho = \frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha} :$
$\frac{\cos.\ \varrho}{\sin.\ \varrho}$; und $\cos.\ \alpha : \cos.\ \varrho$, oder $Nn : Oo = a :$
CM; zusammengesetzt $a \cos.\ \alpha : b \cos.\ \varrho = \frac{a \cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha} :$
$\frac{CM \cos.\ \varrho}{\sin.\ \varrho}$. Aus diesem findet man $CM = \frac{b \sin.\ \varrho}{\sin.\ \alpha}$.

20.

20. IV. Aufgabe. Es werden auf einer Elliptoide, deren Achsen bekannt sind, drey Punkte M, O, N (7 Fig. I Taf.) sammt den Winkeln MPO (= ACD) OPN (= DCB) gege en; man sucht den Punkt K, im welchen der durch M, O, N gehende Plan die Achse der Elliptoide schneidet. 7 Fig. I Taf.

Auflösung. Wenn die Punkte M, O, N gegeben werden, so werden sie entweder durch die Abscissen, oder die Ordinaten der Meridiane, in welchen sie sind, oder durch ihre Polhöhen, oder endlich durch die Winkel gegeben, welche die Halbmesser des Aequators mit den Halbmessern der Meridiane, die aus dem Mittelpunkte C auf M, O, N gezogen werden, enthalten. Im ersten Falle findet man aus der Gleichung auf einen Meridian entweder aus der gegebenen Ordinate die entsprechende Abscisse, oder aus dieser die Ordinate für jeden Punkt. Wird für einen jeden Punkt die Polhöhe φ gegeben, so hat man $tang.\,\alpha = \frac{b^2}{a^2}\,tang.\,\varphi$, folglich auch $\sqrt{tang.\,\alpha \times tang.\,\varphi} = tang.\,\varrho$, und $x = a\,cos.\,\varrho$, $y = b\,sin.\,\varrho$. Eben so, wenn α gegeben wird, hat man φ und ϱ, daß man also in gegenwärtiger Aufgabe MR, RC; OL, LC; NQ, QC als bekannt annehmen darf.

Man ziehe QR, welche CD in E schneidet, wie auch NI mit QR parallel. Aus E mache man EF mit den Ordinaten MR, OL ꝛc. parallel, so wird diese in F durch die Senne MN, und in X durch NI gehen. Aus dem Winkel RCQ, und den Seiten CR, CQ findet man in dem Dreyecke RCQ die Seite RQ, und die Winkel CRQ, CQR; dann in dem Dreyecke ECQ hat man CQ und alle Winkel, folglich findet man CE und EQ. Man setze NI (= QR) : IM (= MR — NQ) = NX (= QE) : XF. Man gebe XF zu XE =

NQ hinzu, so hat man EF, und wenn man aus O durch F in dem Plane des Meridians sich eine Linie vorstellt, die in V den Halbmesser CD, und in K die Achse PC schneidet, wie auch aus F die Linie FH mit DC parallel, so steht OH (= OL — FE) : HF (= LC — EC) = OL : LV, und man bekömmt LC — LV = VC. Endlich geben die ähnlichen Dreyecke LOV, VKC, VL : OL = VC : CK. W. zuf. w.

21. V. Aufgabe. Es werden die Punkte M, N, K sammt CP, CA, und dem Winkel ACB gegeben; man sucht die Senne YZ des Aequators, durch welche der Plan MON geht.

Auflösung. Aus den Punkten M, N weis man MR, RC; NQ, QC. Man ziehe aus K die Linien KrM, KqN, welche die Halbmesser AC in r, und BC in q schneiden. Die ähnlichen Dreyecke RMr, rKC geben MR + CK : CK = RC : rC. Eben also steht NQ + CK : CK = QC : qC.

In dem Dreyecke rCq hat man demnach den Winkel C sammt den Seiten Cr, Cq, und man findet die Seite rq sammt den Winkeln r und q, wie auch den Perpendikel CT, der aus C auf rq fällt, und die Senne YZ gleich abtheilet. Dann hat man YC oder AC : CT = 1 : *sin.* CYT, und 1 : *cos.* CYT = CY (*a*) : YT, mithin findet man YZ = 2YT. Da Crq = YrA = ACY + rYC, wird Crq — TYC = ACY. Auf gleiche Weise wird BCZ = Cqr — CZT, oder Cqr — CYT, und man hat demnach die Punkte Y, Z des Aequators, durch welche die Ellipse MON geht. W. zuf. w.

22. Anmerkung. Wenn man T mit K verbindet, kann man in dem rechtwinklichten Dreyecke TCK auch den Neigungswinkel des Planes MON gegen den Aequator finden, nämlich CTK, wie auch den Scheitelpunkt

punkt der kleinern Achse der Ellipse MON. Allein wir wollen dieses in folgenden Aufgaben auf eine andere Art suchen.

23. VI. Aufgabe. Es wird in einer Ellipse CD, und der Winkel NDA gegeben (8 Fig. I Taf.) nebst CP, CA; man sucht die Ordinate NG auf den halben Durchmesser CL, dessen Mitdurchmesser CM mit ND parallel ist. 8 Fig. I Taf.

Auflösung. Man mache CM mit DN parallel, und nenne den Winkel MCA $= \alpha$, suche $\frac{a^2}{b^2}\ tang.\ \alpha = tang.\ \varphi$, wie auch $\sqrt{tang.\ \alpha \times tang.\ \varphi} = tang.\ \varrho$, $sin.\ \varrho$, und $cos.\ \varrho$, so hat man $a\ cos.\ \varrho = CR$, $b\ sin.\ \varrho = MR$, $CM = \frac{b\ sin.\ \varrho}{sin.\ \alpha}$, $CL = \frac{b\ cos\ \varrho}{cos.\ \varphi}$, $ACL = 90^\circ - \varphi$. In dem Dreyecke CDG hat man also alle Winkel, und die Seite CD, und man findet CG aus der Analogie $sin.\ (\alpha + 90^\circ - \varphi) : sin.\ \alpha = CD : CG$. Nun steht $CL^2 : CL^2 - CG^2 = CM^2 : NG^2$. W. zuf. w.

24. Zusatz. Es ist klar, wenn eine Elliptoide durch die Umdrehung der Ellipse PMAL um die Achse PC entsteht, und sie durch einen Plan, der auf PMA senkrecht steht, und durch NG geht, geschnitten wird, die Ellipse jener ähnlich ist, die durch einen parallelen Schnitt durch den Mittelpunkt gestaltet wird. In diesem Falle aber werden CM, GN die Hälften der kleineren Achsen, und jene, die durch C geht, hat die größere Achse $= 2CA$, folglich steht $CM : CA = NG : \frac{CA \times NG}{CM}$ = der Hälfte der größeren Achse der Ellipse, die durch NG geht.

25. VII. Aufgabe. Es werden die Punkte M, N, K
9 Fig. 1 Taf. (9 Fig. I Taf.) gegeben; man sucht die Hauptachsen der Ellipse, die durch diese Punkte geht.

Auflösung. Da MR, RC; NQ, QC, wie auch CK bekannt sind, hat man auch MK, NK. Denn es ist MR + CK : MR = RC : Rr. Eben also findet man Qq. Aus Rr, MR bekömmt man Mr, und dann steht wiederum MR : Mr = CK : rK, und man erhält MK = Mr + rK. Auf gleiche Art sucht man NK.

Man setze MK : RC oder Mm = 1 : *sin.* MKP; item NK : Nn oder QC = 1 : *sin.* NKP. Wenn man aus dem Mittelpunkte K mit einem beliebigen Halbmesser Ka auf den Meridianen PMA, PNB die Cirkelbögen *ca*, *cb*, und auf dem Plane, der durch M, N, K geht, den dritten Bogen *ab* beschreibt, hat man in dem sphärischen Dreyecke *acb* die Seiten *ac* = MKP, *cb* = NKP, und den Winkel *acb* = ACB, und findet *ab*. Man suche den Perpendiculärbogen *cd*, der aus *c* auf *ab* fällt, auch *ad*, und *acd* = ACE, so hat man 1. den Abstand des Meridians POE, der auf die Ellipse NMO senkrecht steht, und durch die kleinere Achse (die in OK liegt,) geht, von dem Meridiane PMA. 2. Den Mitwinkel des *c*K*d* oder PKO, nämlich CϱK, wenn OK den Halbmesser CE in ϱ schneidet. In dem rechtwinklichten Dreyecke CϱK hat man die Winkel, und die Seite CK, mithin findet man Cϱ. Aus diesen kann man nach der vorigen Aufgabe und ihrem Zusatze die Hauptachsen der Ellipse OMN bestimmen. W. zuf. w.

26. Zusatz. Aus dem Bogen *db* hat man den Winkel OKN, und aus dem Bogen *ad* den Winkel MKO. Wenn man setzt 1 : *sin.* OKN = NK : Nν; und 1 : *sin.* OKM = MK : Mμ, bekömmt man die Ordinaten Nν, Mμ auf die kleinere Achse der Ellipse OMN,

OMN, oder die Abscissen in der größeren vom Mittelpunkte aus gerechnet, welcher sich in der Linie OK befinden muß. Es ist auch einleuchtend, daß der Bogen $cd = $ OKP den Winkel mißt, unter welchem die kleinere Achse der Ellipse OMN die Achse PC der Elliptoide schneidet.

27. VIII. Aufgabe. Auf den Punkt M der Ellipse OMN einen Perpendiculärbogen zu beschreiben. (10 Fig. II Taf.); wie auch den elliptischen Winkel PMO sammt den Hauptachsen des Perpendiculärbogens zu bestimmen. 10 Fig. II Taf.

Auflösung. Man stelle sich vor, in der 10 Fig. II Taf. sey OMo eben die Ellipse OMN der 9ten; EOPB der Meridian, der durch ihre kleinere Achse Oo geht; $\varkappa$ ihr Mittelpunkt; $\alpha\varkappa\beta$ die längere Achse; PMA der Meridian, der durch M gezogen wird; ML seine Normale in M, deren Verlängerung die Achse der Elliptoide in g schneidet; K der Punkt, im welchen Oo durch PQ geht. Nach der vorigen Aufgabe, wenn M gegeben ist, findet man Oo, $\alpha\beta$, Mμ (die Ordinate auf die kleinere Achse Oo), und die Abscisse $\varkappa\mu$ der Ellipse OMo. Aus diesen findet man auch nach dem Zusatze den Winkel OKP, und man kann auch nach der Formel

$$\frac{O\varkappa^2 \times \varkappa u}{\alpha\varkappa^2} = \frac{O\varkappa^2 \times M\mu}{\alpha\varkappa^2}$$ die Subnormale ru finden,

wie auch die Normale Mr auf M, und $r\omega$, wo sie die kleinere Achse Oo schneidet, und da man Mμ hat, den Winkel MωO.

Nun stelle man sich vor, die Ellipse SM gehe durch Mω, so wird sie 1. auf OMo in M perpendiculär seyn, und 2. die Normale des Meridians PMA in M, nämlich MLg, gemeinschaftlich haben (11); und man findet Mg. Wenn aus g die Cirkelbögen ab in dem Meridiane

 PMA,

PMA, *bc* in dem Meridiane EPB, *ac* in dem Plane der Ellipse beschrieben werden, findet man (11) den Winkel *bac*, den die Plane PM, SM machen, und der zugleich der Winkel dieser Bögen selbst ist, und das Complement des Winkels PMO. W. das erste und zweyte w.

Man lasse in dem sphärischen Dreyecke *abc* aus *b* auf *ac* einen Perpendiculärbogen *bd* fallen; suche diesen, wie auch *ad*, so hat man nicht allein den Scheitelpunkt der kleinern Achse der Ellipse SM, den Winkel, unter welchem ihre kleinere Achse die Achse der Elliptoide schneidet, und die Lage des Meridians, der durch sie geht, sondern man kann auch beyde Hauptachsen nach der VI. und VII. Aufgabe bestimmen. W. das dritte w.

11 Fig. II Taf. 28. IX. Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte R in einer Ellipse AMP (11 Fig. II Taf.) eine Normale zu ziehen.

Auflösung. Man setze RQ $= g$, QC $= f$, AC $=$ a, PC $= b$, ML $= y$, LC $= x$, und LN $\left(\frac{b^2x}{a^2}\right)$: ML (y) $=$ OR ($=$ LQ $= x - f$) : OM ($y - g$). Diese Analogie giebt $xy - \frac{a^2fy}{a^2 - b^2} + \frac{b^2gx}{a^2 - b^2} = o$, eine Gleichung auf eine Hyperbel zwischen den Asymptoten, durch welche der Punkt M bestimmt wird. Nimmt man anstatt y in der vorigen Analogie seinen Werth $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, so bekömmt man eine Gleichung des vierten Grades $x^4 - \frac{2a^2fx^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2[(a^2 - b^2)^2 - a^2f^2 - b^2g^2]x^2}{(a^2 - b^2)^2}$ $+ \frac{2a^4fx}{a^2 - b^2} - \frac{a^6f^2}{(a^2 - b^2)^2} = o$. W. zuf. w.

Anmer-

29. Anmerkung. Wenn man RO bis an D, QR bis an H verlängert, und R sehr nahe an DH liegt, kann man ohne merklichen Fehler den Bogen DH für einen kleinen Theil der Tangente in M ansehen, auf welche RM perpendiculär steht. Noch sicherer ist es, wenn man aus der Proportion CQ : QR = 1 : *tang.* RCQ = *tang.* GCI den Winkel GCI sucht, und diesen = α setzet. Dann suche man $\frac{a^2}{b^2} \times tang.\, \alpha = tang.\, \phi$, und aus $\sqrt{tang.\, \phi \times tang.\, \alpha} = tang.\, \varrho$, *sin.* ϱ, und *cos.* ϱ, so hat man GI = $b\, sin.\, \varrho$, IC = $a\, cos.\, \varrho$, aus dem man GC findet, und GR = GC — $\sqrt{f^2 + g^2}$. Nimmt man in der Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ QC anstatt x, so bekömmt man QH, und HR = QH — RQ. Der Winkel GRH ist = 90° — α, mithin sucht man die Höhe RM des Dreyeckes GRH, und den Winkel GRM, welcher von QRC, oder 90° — α hinweggenommen, den Winkel QRN = LMN zurück läßt, oder das Complement der Polhöhe des gesuchten Punktes M.

30. X. Aufgabe. Es wird die Ellipse GMH in der Ellipsoide gegeben; man verlangt aus einem gegebenen Punkte F auf ihren Umkreis einen Perpendiculärbogen zu ziehen. (12 Fig. II Taf.) 12 Fig. II Taf.

Auflösung. Man beschreibe durch F einen Meridian PFI, und lasse aus F auf den Halbmesser DI des Aequators einen Perpendikel FE fallen. Durch E ziehe man auf eben dem Plane des Aequators eine Senne LO mit dem Durchmesser des Meridians APB, der durch die kleinere Achse HG der Ellipse geht, parallel. Aus dem Scheitelpunkte H der Ellipse ziehe man auf AB einen Perpendikel HX, und aus X auf dem Plane

des Aequators einen andern auf AB, nämlich XY, bis an die Senne LO, mache TY mit XH gleich, und parallel; ziehe endlich TD mit GH parallel, und auf TD aus F den Perpendikel FR. Durch R ziehe man auf die Ellipse GMH nach der vorigen Aufgabe eine Normale MRN; mache NS mit FR parallel; die Ellipse, die durch S, F, M geht, wird in M auf GMH perpendiculär seyn. Der Beweis ist aus dem vorigen klar. W. zuf. w.

Für die folgende Aufgabe gebrauchen wir uns des nachgesetzten Lehnsatzes.

13 Fig. II Taf. 31. Lehnsatz. Wenn man (13 Fig. II Taf.) auf der größeren Achse AB der Ellipse APB, eine zweyte beschreibt, nämlich AΠB, also, daß sich (wenn AC = a, CP = b) CP zu CΠ verhält, wie b^2 zu a^2, so wird ein Halbmesser CL der zweyten mit der verlängerten Normale MK, bis sie an die Achse PQ stößt, gleich, und parallel seyn.

Beweis. Man beschreibe mit dem Halbmesser CA = a einen Quadranten GNB, ziehe LD, CL, CN, CM, so steht CD : DM = 1 : $tang. \alpha$

MD : DN = b : a

DN : DL = b : a

und zusammengesetzt

CD : DL = $b^2 : a^2 \times tang. \alpha$. Es ist aber CD : DL = 1 : $tang.$ LCD, folglich 1 : $tang.$ LCD = $b^2 : a^2 \, tang. \alpha$, und $tang.$ LCD = $\frac{a^2 \times tang. \alpha}{b^2}$. Wir hatten (16) $tang. \phi = \frac{a^2 \times tang. \alpha}{b^2}$ = $tang.$ MRD, und die Linien MR (die Normale in M der Ellipse APB) und CL sind also parallel; da aber auch ΠCK und LD parallel sind, ist auch CL = KM. W. zu erw. w.

32. Zusatz. Wenn man Lk mit MC parallel zieht, ist Lk die Normale in L der Ellipse AΠB, und wenn CM in m verlängert wird, wird die Tangente in m des Cirkels AGB mit der Tangente in L der Ellipse AΠB; und die Tangente in n des Cirkels mit der Tangente in M der Ellipse APB parallel. Wir haben gehabt (19) $CM = \frac{b \sin. \varrho}{\sin. \alpha}$; nun ist im Ansehen der Ellipse AΠB der Winkel $\alpha = LC\Pi = 90° - \phi$, $\varrho = NC\Pi = 90° - \varrho$, $CB = a$, folglich wird $CL = MK = \frac{a \cos. \varrho}{\cos. \phi}$.

33. XI Aufgabe. Es werden auf der Elliptoide zwey Punkte M, N gegeben; man will den kürzesten elliptischen Bogen von N zu M beschreiben. (14 Fig. II Taf.) 14 Fig. II Taf.

Auflösung. Auf dem Durchmesser XY des Meridians XPY beschreibe man eine Ellipse XΠY, in welcher $\Pi C = \frac{XC^2}{PC}$. Wenn beyde Ellipsen um die Achse ΠCq gedrehet werden, entstehen zwey Elliptoiden. Aus M und N lasse man auf die Halbmesser CA, CB des Aequators die Perpendikel ME, NF fallen, ziehe durch E, F auf dem Plane des Aequators die Senne GH, und durch C den Durchmesser XY mit GH parallel. Man schneide die Elliptoide durch einen auf den Aequator perpendiculären Plan, der durch GH geht. In diesem verlängere man FN, bis sie in n an die mit XΠY ähnliche Ellipse GmLnH stößt. Aus n ziehe man in eben diesem Plane nm mit MN parallel, und schneide die Elliptoide noch einmal mit einem Plane $\pi o C$, der durch den Mittelpunkt C geht, und zugleich auf mn senkrecht steht. Gleichfalls mache man durch mn einen neuen Schnitt, der auf gleiche Weise durch C geht,

also,

also, daß *orC*, der gemeinschaftliche Durchschnitt der Plane *πoC*, *mon* ein Halbmesser der beym Pole Π verlängerten Elliptoide sey, und die Senne *mn* in *r* unter einem rechten Winkel schneide. Auf* der verlängerten Sphäroide beschreibe man durch *o* den Meridian Π*o*D, in dessen Plane der Meridian POD der zusammengedrückten Elliptoide liegt, welchen in O der aus *o* auf CD fallende Perpendikel *ot* durchschneidet. Aus O ziehe man OK mit *o*C parallel, und beschreibe den Bogen MON also, daß dessen Plan durch K gehe, oder (welches eines ist) man schneide die bey dem Pole zusammen gedrückte Elliptoide durch einen mit *mon*C parallelen Plane MONK, so wird MON der gesuchte Bogen seyn. Zum Beweise mache man noch den Durchschnitt *p*OK mit *π*oC parallel, so muß auch dieser auf die Senne MN senkrecht stehen.

Daß MON der kürzeste Bogen sey, wird erhellen, wenn ich werde erwiesen haben, daß OK die gemeinschaftliche Normale des Meridians POD, der Ellipse MON, und der Ellipse *p*O sey.

Und daß OK die Normale des Meridians POD sey, liegt aus dem Lehnsatze am Tage. Es ist aber auch OK auf die Ellipse MON in O normal. Denn hätte diese Ellipse in O eine andere Normale, als OK, so wäre ihre Tangente in O auf dieselbe senkrecht, und da der Berührungsplan der Elliptoide in O auf OK perpendiculär ist, könnte diese Tangente sich nicht in dem Berührungsplane befinden. Es muß demnach OK auch mit der Normale in O der Ellipse MON eintreffen. Endlich muß auch die Tangente in O der Ellipse *p*O, als eine Linie, die in dem Berührungsplane liegt, auf OK perpendiculär seyn, und wenn *p*O in O eine andere Normale, als OK hätte, würde sie auf diese gleichfalls senkrecht stehen, und sie wäre auf zwey Linien, die in

dem

dem nämlichen Plane mit ihr liegen, in dem Punkte O, allwo sie sich schneiden, perpendiculär, welches unmöglich ist; daß demnach OK die gemeinschaftliche Normale der drey Ellipsen POD, MON, pO seyn muß.

Da wir erwiesen haben, daß in OK die Normalen der Ellipsen MON, und pO zusammen treffen, auch vermög der Vorrichtung der Plan der einen auf den Plan der andern perpendiculär stehe, ist klar, daß sich ihre Bögen unter einem rechten Winkel schneiden. In der 15 Fig. (II Taf.) stelle $\alpha O\beta$ die Ellipse pO, MNO die von gleicher Benennung, und OK die gemeinschaftliche Normale vor; R sey der Punkt, in dem die Senne MN von der Normale geschnitten wird. Ich erweise, daß ein jeder anderer Bogen MxN, MyN, der nicht durch O geht, größer sey, als MON; denn da RO ein Theil der Normale der Ellipse $\alpha O\beta$ ist, ist RO aus R bis auf den Umkreis der Ellipse der kürzeste Weg, mithin $RO < Rx$, die Senne MRN aber ist beyden Bögen MON, MxN gemein. Man stelle sich vor, MR werde in gleiche und unendlich viele verschwindende Theile Mπ, $\pi\varkappa$, $\varkappa p$ ꝛc. geschnitten, und die Ordinaten $\pi\mu$, $\varkappa\nu$, pm, qn ꝛc. seyen mit RO parallel; wenn auch μs, νu, mr ꝛc. mit MR parallel gezogen werden, ist klar, daß ein jeder verschwindende Bogen Mμ, $\mu\nu$, νm ꝛc. durch $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ausgedrückt werde; (denn man kann der Ellipse die Achsen der Coordinaten mit MN, OK parallel geben, auch $y = MR$, $x = OR$, und dy als unveränderlich annehmen,) oder (da dx immer abwächst, bis es in O verschwindet, indem die Tangente Tϑ mit MN parallel wird,) wenn man $\mu\pi = dx$, $\nu s = dx'$, $mu = dx''$ ꝛc. setzet, ist es klar, spreche ich, daß $M\mu = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $\mu\nu = \sqrt{dx'^2 + dy^2}$, $\nu m = \sqrt{d''x^2 + dy^2}$, $mn =$ 15 Fig. II Taf.

$\sqrt{d''x^2}$

$\sqrt{d''x^2 + dy^2}$ rc. sey, und MO $= (\sqrt{dx^2 + dy^2} + \sqrt{d'x^2 + dy^2} + \sqrt{d''x^2 + dy^2} + \sqrt{d'''x^2 + dy^2} + \ldots\ldots \sqrt{o + dy^2})$. Nun ist es einleuchtend, daß die unendliche Reihe von $\sqrt{dx^2 + dy^2} + \sqrt{d'x^2 + dy^2} + \ldots\ldots$ dazumal ein kleinstes ist, wann bey unveränderten dy die Summe aller dx, dx', dx'', dx''' rc. ein kleinstes ist; und da allein OR dieses Bedingniß erfüllt, wenn es mit der Normale der Ellipse $\alpha O \beta$ eintrifft, folgt augenscheinlich, daß MO $<$ Mx. Da TZ mit MRN parallel ist, sieht ein jeder, daß man von dem Bogen NO eben dieses verstehen müße, was wir von MO gesagt haben; und wir haben demnach den kürzesten Bogen richtig bestimmt. W. zuf. u. zu erw. w.

34. I. Anmerkung. Man sieht, daß es hauptsächlich auf die Bestimmung des Punkts o, und der Linie oC ankomme, um die Sache in eine ordentliche Berechnung zu bringen, welche nur allein die Weitläuftigkeit
16 Fig. IV. Taf. beschwerlich machen kann. In der 16ten Fig. (IV Taf.) suche man erstlich die Neigung der Senne MN gegen den Plan des Aequators, und setze EF : LM ($=$ ME $-$ NF) $= 1 : tang.$ MNL. Man ziehe durch C einen Durchmesser SCV, der die Achse unter dem Winkel $90° -$ MNL schneide, und errichte auf diesen in C den Perpendikel CRπ, (und dieses in dem Plane des Meridians, mit dem FE parallel ist,) welcher den Meridian XPY in R, XΠY in π schneidet. Aus dem Dreyecke ECF suche man den Perpendikel Cf, der aus C auf EF fällt, der zugleich auf CRπ senkrecht stehen wird. Indem der Winkel PCR bekannt ist, findet man nach §. I. CR. Man schneide durch einen auf XΠY senkrechten Plan die Elliptoiden, der durch Cπ geht, und man hat für die Ellipse Rr, die durch diesen

Schnitt in der zusammengedrückten Elliptoide gestaltet wird, die Hälfte der kleinern Achse CR, die Hälfte der größeren aber den Halbmesser CX des Aequators. In dieser nehme man Cf für die Abscisse vom Mittelpunkte aus, und suche vermittelst der angeführten Formeln die entsprechende tC, oder rf, den Winkel $rCf = Crt$, und den Halbmesser Cr. Es hat auch diesen Halbmesser der Meridian PrD mit der Ellipse Rr gemein, und wenn man aus t auf die Achse der Elliptoide einen Perpendikel tu fallen läßt, steht $1 : \sin. RCP = Ct : tu$, folglich hat man tu. Aus eben dem Dreyecke utC sucht man uC. Man verbinde u mit r, so wird auch ru auf die Achse in u perpendiculär seyn, und man hat $Cr : Cu = 1 : \cos. rCP$. Eben diesen Winkel rCP enthält oC mit ΠC, folglich kann man Co aus den angeführten Formeln sehr leicht finden, und da man die Punkte M, N, K hat, die Ellipse MON vollkommen bestimmen, und berechnen.

35. II. Anmerkung. Diese partikuläre Auflösung für die Elliptoide, deren Achsen gegeben sind, ist nicht aus jener universalen hergeleitet, die Hr. Leonh. Euler anführt. (Comment. Acad. Petrop. Tom. III. ad annum 1728. De Linea brevissima in superficie quacunque duo quælibet puncta jungente. Und Methodus inveniendi Lineas curvas Maximi, Minimive proprietate gaudentes Lausan. & Genev. 1744). Der Grund ist allgemein, und auf eine jedwede krume Fläche anwendbar, daß nämlich, wenn (14 Fig. II. Taf.) pO auf MON perpendiculär steht, und die Normalen in O der Bögen MON und pO in eine Linie zusammen treffen, MON der kleinste Bogen zwischen M und N sey. Wir werden (48. und den folg.) sehen, um wie vieles durch Particulärmethoden die Berechnung erleichtert werde. Jedoch muß ich hier anmerken, daß obschon 14 Fig. II Taf.

MON

MON der kürzeste elliptische Bogen zwischen M und N ist, doch ein Theil dieses Bogens nicht der kürzeste sey, der von M zu einem Zwischenpunkte (zum Beyspiele O) kann beschrieben werden. Denn der Plan dieses Bogens MON geht durch die Normale in O des Meridians POD; der kürzeste zwischen M und O kann durch diese nicht gehen, sondern durch die Normale eines andern Meridians zwischen PMA, und POD, und liegt mithin in einem anderen Plane. Es kann also nicht seyn, daß einem Theile des Bogens MON dasjenige zukömmt, was von dem ganzen kann gesagt werden, daß er nämlich ein Kleinstes sey. Sollte diese Eigenschaft einem jeden Elemente des Ganzen zustehen, so müßte der Bogen eine Spirale seyn, und könnte nicht in dem nämlichen Plane liegen.

36. III. Anmerkung. Wenn die gegebenen Punkte M, N eine gleiche Polhöhe hätten, würde der Meridian POD selbst die Stelle der Ellipse Rr vertreten, und die Senne MN gleich abtheilen. Lägen endlich die gegebenen Punkte α, β in dem nämlichen Meridiane XωP, so dürfte man nur die Ordinate $x\alpha$ verlängern, $\gamma\delta$ mit $\alpha\beta$ parallel ziehen, aus C auf sie einen Perpendikel fallen lassen, nämlich C$\varepsilon\phi$, und einen andern aus ϕ auf XC, der in ω den Meridian schneidet; ωk mit ϕC parallel würde die Normale dieses Bogens $\alpha\omega\beta$ seyn, und der gesuchte kürzeste Bogen wäre der Meridian selbst.

§. II.

Methode auf der Oberfläche einer Ellipsoide Perpendikularhöhen, und den wahren Abstand zweyer Stationen zu messen.

37. I. Aufgabe. Es wird die Polhöhe der Stationen M, N, die in dem nämlichen Parallele MIN (16 Fig. II Taf.) liegen, sammt der Differenz der Meridiane, oder dem Winkel ACB, gegeben; man sucht aus M die Perpendikularhöhe KN. 16 Fig. II Taf.

Auflösung. Ich nehme allhier an, die Vertikallinie eines Punktes auf der Ellipsoide sey die Verlängerung der Normale des Meridians, der durch diesen Punkt geht. Es sey demnach NE die Normale der Station N; MD der Station M; V der Mittelpunkts des Parallels MIN; NK die Perpendikularhöhe; MH auf MD perpendikulär, folglich die scheinbare Horizontallinie im Ansehen der Station M, und es wird demnach HN die Vertiefung der Station N unter dem Horizonte seyn. Es ist klar, daß alles dieses unverändert bleibe, wenn man MD, NE bis in ω verlängert, allwo sie die Achse PC schneiden, und mit dem Halbmesser ωM einen Cirkelbogen MLN beschreibt, der in eben dem Plane der Normalen, der Höhe KN, und der Horizontallinie MH liegt. Nun geben die ähnlichen Dreyecke MRD, MVω, RD : MD = MV : Mω, oder (17, 18) $\frac{b^2 \cos \varrho}{a}$: $\frac{b \sin \varrho}{\sin. \varphi} = a \cos. \varrho$: M$\omega = \frac{a^2 \sin \varrho}{b \sin. \varphi}$. Man setze ACB $= c$, so steht 1 : $\sin. \frac{1}{2}c$ = MV (= RC = $a \cos. \varrho$) : $\frac{1}{2}$MN = $a \cos. \varrho \times \sin. \frac{1}{2}c$; und M$\omega$ $\left(\frac{a^2 \sin. \varrho}{b \sin. \varphi}\right)$:

$\frac{1}{2}MN \left(a \cos. \varrho \times \sin. \frac{1}{2}c\right) = 1 : \sin. \frac{1}{2}M\omega N = \frac{b}{a} \times$ $\cot. \varrho \times \sin. \frac{1}{2}c \times \sin. \varphi$. Der Winkel $M\omega N$ sey $= \omega$, und wir haben $1 : \tang. \omega = M\omega : MH$, und $\sin. \omega : 1 = MH : H\omega$, zusammengesetzt $\sin. \omega : \tang. \omega = \cos. \omega : 1 = \frac{a^2 \sin. \varrho}{b \sin. \varphi} : H\omega = \frac{a^2 \sin \varrho}{b \sin. \varphi \times \cos. \omega}$, mithin $H\omega - N\omega = HN$ $= \frac{a^2 \sin. \varrho}{b \sin. \varphi \times \cos. \omega} - \frac{a^2 \sin \varrho}{b \sin. \varphi} = \frac{a^2 \sin. \varrho (1 - \cos. \omega)}{b \sin. \varphi \times \cos. \omega} =$ $\frac{2a^2 \sin. \varrho \left(\sin. \frac{1}{2}\omega\right)^2}{b \sin. \varrho \times \cos. \omega}$. Die Analogie $1 : \tang. \omega =$ $M\omega \left(= \frac{a^2 \sin. \varrho}{b \sin. \varphi}\right) : MH$, giebt uns $MH =$ $\frac{a^2 \sin. \varrho \times \tang. \omega}{b \sin. \varphi}$, und wir haben in dem Dreyecke MHK die Seite MH, das Supplement des Winkels $MH\omega$, oder das Supplement von $90^\circ - \omega$, und den in M beobachteten Winkel KMH, mithin können wir KH finden; und wenn wir die Depression NH hinzusetzen, haben wir die gesuchte Höhe NK. W. zuf. w.

38. Anmerkung. Es sey $\varphi = 50^\circ$, $c = 1$; nach den angeführten Formeln finde ich $\varrho = 49^\circ\ 52'\ 39'', 2$, $\omega = 32^\circ\ 21'', 6$, $NH = 0{,}0051307$, wenn ich $a = 115{,}5$, $b = 115$ annehme. Geben wir mit Picard dem Halbmesser des Aequators 3370770 Wiener Klafter, wird die Vertiefung $NH = 149{,}73$ Klafter, oder 898,38 Schuh.

39. II. Aufgabe. Wenn die Polhöhe der Statio- 17 Fig. II Taf. nen M, N (17 Fig. II Taf.) gegeben wird, und diese in dem nämlichen Meridiane liegen, sucht man aus N die Pependikulärhöhe KM.

Auflö-

Auflösung. ME, ND stellen die Normalen auf M und N vor. MEA sey $= \varphi$, NDA $= \Phi$. Man findet (17, 18) $\frac{b^2}{a^2}(tang.\ \varphi)^2 = (tang.\ \varrho)^2$, und $\frac{b^2}{a^2}(tang.\ \Phi)^2 = (tang.\ r)^2$, mithin ME $= \frac{b\ sin.\ \varrho}{sin.\ \varphi}$, ND $= \frac{b\ sin.\ r}{sin.\ \Phi}$, die Subnormalen $\frac{b^2 cos.\ \varrho}{a}$, und $\frac{b^2 cos.\ r}{a}$, welche, wenn sie von den ihnen zustehenden Abscissen $a\ cos.\ \varrho$, und $a\ cos.\ r$ abgezogen werden, geben CD $= a\ cos.\ r - \frac{b^2 cos.\ r}{a} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) cos.\ r$, und CE $= \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) \times cos.\ \varrho$, wie auch CD — CE = DE $= \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) \times (cos.\ r - cos.\ \varrho) = \frac{a^2 - b^2}{a} \times 2\ sin.\ (\tfrac{1}{2}\varrho + \tfrac{1}{2}r)\ sin.\ (\tfrac{1}{2}\varrho - \tfrac{1}{2}r)$.

Aus dem Punkte E lasse man auf die verlängerte ND einen Perpendikel EO fallen, und setze 1 : $cos.\ \Phi$ = ED : OD; item 1 : $sin.\ \Phi$ = ED : EO. Man ziehe EG mit ON parallel, und in dem bey G rechtwinklichten Dreyecke EGH wird die Seite EG = DN + DO sammt dem Winkel HEG $= \varphi - \Phi$ gegeben, folglich findet man HG und HE. Von HE nehme man ME hinweg, und es bleibt HM die Vertiefung der Station M unter dem scheinbaren Horizonte der Station N. Zu HG setze man den Theil EO = GN hinzu, so hat man in dem Dreyecke KHN die Seite HN, den beobachtenden Winkel KNH, und KHN $= 180° - 90° + \varphi - \Phi = 90° + \varphi - \Phi$, und findet HK, folglich KM = HM + HK. W. zuf. w.

40. I. Anmerkung. Wenn wir $\varphi = 50°$, $\Phi = 49°$ setzen, wird $\varrho = 49° \; 52' \; 39'',2$, $r = 48° \; 52' \; 36'',77$. Aus diesem finde ich MH = 0,01084 in der Voraussetzung N. 37, das ist 323,109 Klafter, oder 1938,654 Wiener Schuhe.

41. II. Anmerkung. Wenn die Polhöhe der Sta-
18 Fig. II Taf. tion N größer ist, als der Station M (18 Fig. II Taf.), ist einleuchtend, daß ODE die Polhöhe der Station N, OED ihr Complement sey, und man findet LO, OE auf gleiche Art; GEH ist die Differenz der Polhöhen, und die ganze übrige Auflösung bleibt, nur daß EG = ND — OD.

42. III. Aufgabe. Es werden die Polhöhen der
19 Fig. III Taf. Stationen M, N (19 Fig. III Taf.) gegeben, sammt der Differenz der Meridiane ACB; man sucht die Perpendikulärhöhe NF aus M zu messen.

Auflösung. Man nehme in dem Meridiane PNB den Punkt V einer mit M gleichen Polhöhe, und suche nach der ersten Aufgabe seine Vertiefung VO unter dem scheinbaren Horizonte der Station M, wie auch OM. Auf M und V ziehe man Tangenten MT, VT, welche die verlängerte Achse CP in T schneiden. Es sey Mq die Normale in M, so sind die rechtwinklichten Dreyecke qMD, pMT ähnlich; (da nämlich MD auf CA, Mp auf CP senkrecht gezogen werden); denn wenn man von den rechten Winkeln TMq, pMD den gemeinschaftlichen pMq hinwegnimmt, bleibt pMT = qMD, und es steht MD : Mq = Mp : MT. Auf gleiche Weise findet man No, die Tangente in N, indem NE zur Normale Nr, wie EC oder Nπ zu No sich verhält.

Es ist auch Cp : CP = CP : CT; item NE oder Cπ : CP = CP : Co, und man hat oT = CT — Co. Man verlängere No, und lasse aus T darauf einen Perpendikel, nämlich Tn, fallen. Die ähnlichen, und recht-

winkl-

winklichten Dreyecke $oN\pi$, oTn geben $No : o\pi$ (= $Co - C\pi$) = $oT : on$. Dieses zu No hinzugesetzt, giebt Nn. Item steht $No : N\pi = oT : Tn$. In dem bey V rechtwinklichten Dreyecke VOT hat man VO, VT, und findet OTV. Es ist auch VTo = MqD, oTn = ENr, folglich hat man OTn. Aus L ziehe man Lm mit Nn parallel, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke LmT die Seite $Lm = Nn$, und den Winkel T; daraus findet man Tm und TL. Man weiß aus dem rechtwinklichten Dreyecke Ton die Seite Tn, folglich wenn man Tm davon abzieht, bleibt mn = LN, der Vertiefung der Station N unter dem Horizonte der Station M. Jetzt kömmt es darauf an, daß wir auch den Theil LF finden. In dem Dreyecke OTM, als dem Horizontalplane des Beobachters M, hat man alle drey Seiten, und suchet den Winkel TOM. Die gefundene Linie LT von OT abgezogen, läßt uns OL übrig. Aus OL, OM, und dem enthaltenen Winkel LOM, suche man in dem Dreyecke OLM die Seite LM, und den Winkel OLM. Da LNR, und Tn auf Nn senkrecht, und in dem nämlichen Plane sind, sind sie parallel, und die Winkel OLN, LTn sind gleich. Wenn man auf dem Plane des Aequators DE zieht, und setzet NE — MD : ED = 1 : *tang.* ENM, und *sin.* ENM : 1 = DE : NM, findet man NM. DE aber erhält man in dem Dreyecke ECD, im welchen CE, CD und ECD bekannt sind.

Man ziehe MR auf den Punkt R, allwo die Normale NrR der Station N die Achse schneidet. In dem bey p rechtwinklichten Dreyecke pRM hat man pR = MD + CR, und pM = CD, folglich findet man MR; mithin hat man in dem Dreyecke RNM alle Seiten, und sucht NRM. Man setze LN zu NR hinzu, so

hat man auch in dem Dreyecke LRM alle drey Seiten nebst dem Winkel LRM, und findet RLM.

Wenn ein Sehestral aus M nach F geht, fällt der Perpendikel nicht auf die Linie LM, sondern senkrecht auf den Horizont OTM des Auges in M; mithin mißt der Beobachter in M nicht den Winkel FML, sondern (wenn FH auf OT perpendikulär gezogen wird) FMH, welchen wir unterdessen $= \alpha$ setzen. Um also FML, und daraus LF zu finden, beschreibe man aus L, als dem Mittelpunkte, die Bögen $\alpha\beta$ auf dem Plane OTM, $\beta\varkappa$ auf dem Plane des Meridians BNP; und $\alpha\varkappa$ auf dem Plane des Dreyeckes LMR. Indem wir die Winkel OLM, OLR, RLM gefunden haben, sind in dem sphärischen Dreyecke $\alpha\beta\varkappa$ die drey Seiten bekannt, und man findet den Winkel $\beta\alpha\varkappa$, welcher die Neigung des Plans LFM gegen den Plan TLM mißt. Man stelle sich vor, es werde mit einem beliebigen Halbmesser M*a* auf dem Horizontalplane des Beobachters in M der Bogen *ab* beschrieben; in dem Plane LFM der Bogen *bc*, und in dem Vertikalplane HFM eben dieses Beobachters *ca*, so hat man ein anders bey *a* rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck *abc*, im welchen der Winkel $cba = \beta\alpha\varkappa$, die Seite $ca = \alpha$ ist, und man findet $bc =$ FML. Man gebe diesen zu LMR hinzu, so sind in dem Dreyecke FMR die Winkel FRM, FMR sammt der Seite MR gegeben, und man findet RF. Wenn man die schon bekannte Länge RL abzieht, bleibt LF. W. zu f. w.

43. Zusatz. TML ist das wahre Azimuth der Station N auf dem Horizonte des Beobachters M. Wenn man auch den Bogen *ab* in dem sphärischen Dreyecke *abc* sucht, hat man das scheinbare.

44. Anmerkung Wenn aus N eine Perpendikulärhöhe in M zu messen wäre, verbliebe die nämliche

Metho-

Methode, und die kleinen Veränderungen, die da vorkämen, wird ein jeder in der Geometrie nur mittelmäßig bewanderter leicht einsehen.

Meine Leser werden es nicht ungütig aufnehmen, daß ich Ihnen nicht eine so lange Reihe der Dreyecke, die in einem Beyspiele zu berechnen wären, vorlege, indem der Fall, da sich die Vertikallinien zweyer Stationen also merklich veränderten, daß man durch ein gewöhnliches Instrument den Unterschied bemerken könnte, nur gar selten vorkommen kann. Es kann auch weder das scheinbare, noch das wahre Azimuth vieles beytragen, wenn man die Ellipse sucht, die durch beyde Stationen hindurch geht, wie wir im folgenden Abschnitte sehen werden.

45. Auf der Oberfläche einer Sphäre, wenn man die Entfernung einer Station von der andern messen will, pflegt man auf dem scheinbaren Horizonte gerade Linien auszustecken, und richtet die Stangen also nach dem Bleysenkel, daß eine die andere dem Auge verdecke. Wollte man auf gleiche Art auf der Oberfläche einer Elliptoide verfahren, würde 1. erfordert, daß gar keine Depression einer Station unter dem Horizonte der andern wäre. Denn es zeiget die Figur selbst (19 Fig. III Taf.), daß der Durchschnitt, welcher durch M*q* und H geschähe, nicht durch N gehen würde. 2. ist klar, daß wenn man die Richtungsstangen immer nach dem Perpendikel auf der Elliptoide aussteckete, man nicht einen elliptischen Bogen, sondern eine Gattung eines Spiralbogens bekäme. Denn da die Normalen immer den Neigungswinkel (2 Fig. I Taf.) HIQ, GKO gegen den Plan des Aequators verändern, können sie nicht in einem Plane liegen; und gleichwie IK auf der Fläche des Aequators eine Spirale giebt, die sich in C endet, also wäre auch HG eine Gattung derselben, die endlich nach dem Pole P

19 Fig. III Taf.

2 Fig. I Taf.

gehen würde. 3. ist zu bemerken, daß wenn man durch was immer für ein Mittel zuwege brächte, daß alle Punkte des Weges von M bis zu N in dem Plane,
20 Fig. III Taf. der durch die Normale MI geht, lägen (20 Fig. III Taf.) die Ellipse MON eine andere wäre, als jene, die in dem Plane der durch die Normale NL und *e*M geht, liegt; und auf diese Art bekäme man von M zu N den Bogen MON, von N zu M aber den Bogen N*o*M. Denn man mache *ad* mit AC parallel, und setze MH : HI = N*a* : *ad*, ziehe durch *d* und I die Linie *d*I*m*, so wird diese der Durchschnitt der Ellipse MON mit dem Plane des Aequators seyn. Zieht man aber H*e* mit BC parallel, und setzet N*a* : *a*L = MH : H*e*, so giebt *n*L*e* den Durchschnitt der Ellipse N*o*M mit dem Plane des Aequators.

46. Wollte man mit jener Genauigkeit die Ellipse MON messen, deren die geometrischen Operationen auf der Kugelfläche fähig sind, so müßte die Polhöhe bey der Stationen bekannt seyn, und man müßte auch den
19 Fig. III Taf. Winkel *cba* (19 Fig. III Taf.) berechnen, und vermitelst eines Micrometers die Richtungslinie nach dem Plane FLM genau bestimmen. Man setze in der 9 Fig. (I
9 Fig. I Taf. Taf.) es sey M*r* eben die Normale MI der 20ten Figur: wenn man sie in K verlängert, hat man die Punkte K, M, N, und man hat alles, was zur Bestimmung der Ellipse OMN mit der Richtigkeit, deren dergleichen Messungen fähig sind, erfordert wird. Denn daß man das wirkliche Maaß eines Bogens MN, der mehr denn 10′ beträgt, nehmen wollte, wird wohl sehr selten, oder niemals geschehen; und bey einem Cirkel wird der Unterschied eines Bogens von 10′, und seiner Senne kleiner als $\frac{1}{10000000}$ Theil, indem für den Halbmesser 1 sowohl die Senne, als der Bogen selbst = 0,0029088 gefun-

gefunden werden. Dergleichen kleine Differenzen, und vielleicht noch etwas größere, müßen den fast unvermeidlichen kleinen Fehlern, die sich immer einmengen, zugeschrieben werden. Man muß also einen kleinen elliptischen Bogen MN, der gemeiniglich nur wenige Minuten beträgt, als die Senne selbst ansehen. Da man voraussetzet, daß die Polhöhen M und N bekannt sind, hat man MR, RC; NQ, QC; dann steht (7 Fig. I Taf.) 7 Fig. I Taf.
MN : MI = 1 : *sin.* MNI, und MN : IN (= RQ) = 1 : *cos.* MNI. Aus den Seiten RQ, RC, CQ findet man in dem Dreyecke RCQ den Winkel RCQ = MPN, und man hat alles, was zur Bestimmung der Ellipse nach der VII. Aufgabe, und ihrem Zusatze erfordert wird.

47. Unterdessen ist es gewiß, daß der Winkel MPN etwas größer ausfallen müße, als er ist, indem man anstatt der Senne den Bogen MN gebraucht hat. Um diesen Fehler zu verbessern suche man den Halbmesser des Krümmungscirkels der Station M (9 Fig. I Taf.), 9 Fig. I Taf.
die dem gefundenen Scheitelpunkte O der kleineren Achse der Ellipse OMN die nächste ist. Man stelle sich einen Quadranten OMNα dieser Ellipse in der 23ten Figur 23 Fig. III Taf.
(III Taf.) vor. Der Halbmesser des Krümmungscirkels in M (den man auf eben den Maaßstab reduciret haben muß, nach welchem man die Länge des Bogens MN genommen hat) sey MR, welcher, da der Bogen MN nur wenige Minuten beträgt, von jenem in N nicht unterschieden ist, und folglich mit der verlängerten Normale in N bey R zusammen trifft. Man setze MR : MN = 206264″,8 (der Halbmesser des Cirkels auf Secunden reduciret) : x, so wird x den Winkel MRN geben, welcher vom MVα (der Polhöhe des Punkts M in der Ellipse αMO) abgezogen den Winkel N$u\alpha$ (den wir sonst φ genennet haben), oder die Polhöhe des Punkts

N in eben dieser Ellipse überläßt, aus dem man (17) Nν findet, folglich auch den Winkel NKO, und die Differenz zwischen diesem und MKO giebt den corrigirten Winkel MKN, aus welchem man die erste Bestimmung verbessern kann. Allein dieses kann nur für kleine Abstände der Station M von N gelten. Wenn die Entfernung groß ist, und die Polhöhen sammt der Differenz der Meridiane, in denen die Stationen liegen, bestimmt sind, muß sie berechnet werden, wie wir in folgender Aufgabe sehen werden. Unterdessen ist aus dem, was wir bisher gesagt haben, klar, daß um eine Reihe verschiedener Dreyecke zu berechnen, die Grundlinie die sicherste sey, die in einem Meridiane selbst gemessen wird, als in dessen Plane alle Normalen des ganzen Bogens sich befinden, wenn es nur die Umstände, und die Lage einer hinlänglichen Fläche zulassen.

48. IV. Aufgabe. Die wahre Entfernung zweyer Stationen zu bestimmen, die in verschiedenen Meridianen liegen, wenn ihre Polhöhen, und die Differenz der Meridiane gegeben werden.

Auflösung. Da in der Auflösung nichts vorkömmt, was nicht schon §. I. (33, 34) wäre gesagt worden, wollen wir die XI. Aufgabe nur auf ein Beyspiel anwenden, und weil ich mir nicht vorstellen kann, daß meine Leser große Liebhaber von weitläuftigen Berechnungen sind, werde ich nur die Resultate hieher setzen. Ich suche den kürzesten Bogen zwischen Wien und Florenz. Die Polhöhe für Wien des k. k. akadem. Kollegii nehme
16 Fig. IV Taf. ich 48° 12′ 34″,7. In der 16ten Figur (IV Taf.) wird Wien durch M angedeutet, und ich nenne diese Polhöhe φ für M. In den Tafeln des Hr de la Lande finde ich die Polhöhe für Florenz 43° 46′ 30″; und ich nenne sie φ für N. Die Länge Wiens nehme ich 43° 2′ 30″; in den gemeldeten Tafeln wird diese

für

für Florenz 28° 42′ angesetzt, daß also die Differenz der Meridiane, oder der Winkel MPN = ACB = 5° 20′ 30″. Den Halbmesser des Aequators nehme ich = a = 115,5, dessen Log. 2,0625820

a^2 4,1251640

Die Hälfte der Achse

= b 115 2,0606978

b^2 4,1213956

Für M ist φ = 48° 12′ 34″,7. Log. *cos.* φ = — 1,8237346. Log. *sin.* φ = — 1,8724990

ϱ = 48° 5′ 9″,95. Log. *cos.* ϱ = — 1,8247861. Log. *sin.* ϱ = — 1,8716602

Für N ist φ 43° 46′ 30″ Log. *cos.* φ = — 1,8585746. Log. *sin.* φ = — 1,8399982

ϱ = 43° 39′ 3″ Log. *cos.* ϱ = — 1,8594864. Log. *sin.* ϱ = — 1,8390138

CE = 77,15571. Log. 1,8873681. ME = 85,57718. Log. 1,9323580.

CF = 83,57346. Log. 1,9220684. NF = 79,38009. Log. 1,8997116.

Cf = 60,88973. Log. 1,7845441.

EF = 9,85864. Log. 0,9938100.

ML = 6,19709. Log. 0,7921851.

MNL = SCX = ΠCπ = PCR = 32° 9′ 11″,13

RCY = α = 57° 50′ 48″,87. Log. *sin.* = — 1,9276932

ϱ = 57° 57′ 31″, 8. Log. *sin.* ϱ = — 1,9282254

$$\text{CR} = \frac{b\ \textit{sin.}\ \varrho}{\textit{sin.}\ \alpha} = 115{,}141008.\ \text{Log. } 2{,}01612300$$

Log. Cf = Log. tr = Log. a + Log. *cos.* ϱ, mithin Log. Cf — Log. a = Log. *cos.* ϱ = — 1,7219621, und ϱ = 58° 11′ 5″.

Log.

Log. Ct = Log. fr = Log. b + Log. $\sin.\ \varrho$ = 1,9905222.

Log. uC = 1,9182154

$urt = 40^\circ\ 31'\ 56'',7$. Log. $\sin.$ = $-$ 1,8128319

Log. ur = 1,9037516

$\Pi Co = PKO = 44^\circ\ 2'\ 45'',6$

Die Polhöhe des Punktes O in dem Meridiane POD = $45^\circ\ 57'\ 14'',4$

Der entsprechende Winkel $\varrho = 45^\circ\ 49'\ 47'',18$.

Log. $\sin.\ \varrho$ = $-$ 1,8556843

$$CK = \frac{a^2 - b^2}{b} \times \sin.\ \varrho = 0{,}718832.$$

9 Fig. I Taf. 49. (9 Fig. I Taf.)

$mK = MK + CK = 86{,}29601$. Log. 1,9359907

$Mm = RC = 77{,}15571$. Log. 1,8873681

$MKP = ac = 41^\circ\ 47'\ 57'',5$. Log. $\sin.$ = $-$ 1,8238154. Log. MK = 2,0635527.

$NKP = bc = 46^\circ\ 12'\ 58''$. Log. $\sin.$ = $-$ 1,8585101. Log. NK = 2,0635583.

Der Winkel $cba = 38^\circ\ 8'\ 32'',5$. Log. $\sin.$ $-$ 1,7907196.

Log. $\sin.\ cd$ = $-$ 1,6492297; $cd = 26^\circ\ 28'\ 49'',5$.

Der Winkel $dcb = 61^\circ\ 29'\ 3''$. Der Winkel $dca = 56^\circ\ 8'\ 33''$.

$db = 39^\circ\ 22'\ 31'',4$. Log. $\sin.$ = $-$ 1,8023612.

$ad = 33^\circ\ 36'\ 26'',4$. Log. $\sin.$ = $-$ 1,7931162.

$ab = 5^\circ\ 46'\ 5''$.

Log. $M\mu$ = 1,8066689

Log. $N\nu$ = 1,8659195

Log. $C\varrho$ = $-$ 1,5539929

8 Fig. I Taf. 50. (8 Fig. I Taf.)

Log. CD = $-$ 1,5539929

$MCA = \alpha = 63^\circ\ 31'\ 10'',5$; $\varrho = 63^\circ\ 37'\ 7'',18$; $\phi = 63^\circ\ 43'\ 21'',8$.

Log.

Log. sin. α = — 1,9518651. Log. sin. ϱ = — 1,9522384. Log. sin. φ = — 1,9526288.

CM = 115,0988. Log. = 2,0610711
CL = 115,3962. Log. = 2,0621916
MCL = 89° 47′ 48″,7. ACL = 26° 16′ 38″,2
CG = 0,320524. Log. = — 1,5058607

Log. $\sqrt{CL^2 - CG^2}$ = 2,0612188

$$\text{Log. } GN = \text{Log. } \frac{CM\sqrt{CL^2 - GC^2}}{CL} = 2{,}0610683$$

NG die Hälfte der kleinern Achse der gesuchten Ellipse MON = 115,0981 = *c*.
Die Hälfte der größeren Achse = 115,49978 = *d*.
Ihr Log. = 2,0625812.

51. (9 Fig. 1 Taf.) 9 Fig. 1 Taf.

Mμ = $d \times$ cos. ϱ.
Log. cos. ϱ = — 1,7440877. ϱ = 56° 18′ 26″,5.
Log. sin. φ = — 1,9201366.

Die Polhöhe des Punktes M in der Ellipse MON = φ = 56° 23′ 58″. Log. sin. φ = — 1,9205188
Nν = $d \times$ cos. ϱ.
Log. cos. ϱ = — 1,8033383; ϱ = 50° 31′ 7″,4;
Log. sin. ϱ = — 1,8875230.
Die Polhöhe des N in der Ellipse MON = φ = 50° 37′ 0″. Log. sin. φ = — 1,8881335.

Anstatt den Bogen MON von 5° 46′ 58″ zu rectificiren, theile ich ihn in 5. gleiche Theile, derer einer = 1° 9′ 23″,6; suche für einen jeden den Halbmesser des Krümmungscirkels aus der Formel $\frac{a^2(\sin. \varrho)^3}{b(\sin. \varphi)^3}$.

Polhöhe für N 50° 37′ 0″. Log. sin. φ = — 1,8881335. Log. sin. ϱ = — 1,8875230

I 51° 46′ 23″,6. Log. *sin.* φ = — 1,8951837. Log. *sin.* ϱ = — 1,8946028
II 52° 55′ 47″,2. Log. *sin.* φ = — 1,9019470. Log. *sin.* ϱ = — 1,9013960
III 54° 5′ 10″,8. Log. *sin.* φ = — 1,9084323. Log. *sin.* ϱ = — 1,9079105
IV 55° 14′ 34″,4. Log. *sin.* φ = — 1,9146478. Log. *sin.* ϱ = — 1,9141553

Log. des Halbmessers des Krümmungscirkels in

N = 2,0622626
I = 2,0623514
II = 2,0624411
III = 2,0625287
IV = 2,0626166

52. Ich nehme an, ein Grad des Aequators halte 58826 Wiener Klafter, und suche, wie viel dergleichen Klafter einen Bogen von 1° 9′ 23″,6 zukommen? Den Logarithmus finde ich 4,8327358. Endlich setze ich: der Halbmesser des Aequators verhält sich zu der Anzahle der Klafter, die den gefundenen Logarithmus zustehen, wie der Halbmesser des Krümmungscirkels in N, in I, II ꝛc. zu der Zahl der Klafter eines gleichen Bogens. Wenn ich von dem Logarithmus 4,8327358 den Logarithmus von *a* abziehe, so bekomme ich einen beständigen Logarithmus, den ich nur zu dem Logarithmus des Krümmungscirkels hinzusetzen darf, und erhalte also für den Bogen 1° 9′ 23″,6 in N 4,8324164 . . 67985,515

in N	4,8324164	..	67985,515
I	4,8325052	..	67999,422
II	4,8325949	..	68013,468
III	4,8326825	..	68027,187
IV	4,8327704	..	68041,000

Die Summe dieser fünf Bögen giebt die Länge des ganzen NOM = 340066,592 Wienerklafter. Wenn ich

ich den Bogen in mehrere und kleinere Theile abgetheilet hätte, wäre die Berechnung etwas genauer. Allein für ein Beyspiel ist dieses genug.

§. III.

Von den Winkeln, die zwischen einem Meridiane, und einem andern elliptischen Bogen enthalten werden.

53. Aus dem, was wir gesagt haben (31), ist klar, daß wenn man setzet, Mr (9 Fig. I Taf.) sey die Normale in M des Meridians PMA, und den Winkel PMN nimmt, dieser der wahre Winkel sey, den die elliptischen Bögen PM, MN enthalten. Denn sofern man sich einen Berührungsplan der Elliptoide in M vorstellt, der auf Mr senkrecht steht, und in dem sich die Tangenten in M der Ellipsen PM, MN befinden, ist es einleuchtend, daß diese Tangenten nichts anders sind, als die Durchschnitte der verlängerten Plane der Ellipsen mit dem Berührungsplane. Ein auf diese Art genommener Winkel hat demnach keiner Reduktion vonnöthen. Allein wir haben schon angemerkt, (45), daß wenn man den Winkel PNM eben also nähme, man von N bis M eine andere Ellipse bekäme, als von M nach N. Wollte man also die Winkel in einem bestimmten Dreyecke PMN wissen, so müßte einer genommen, der andere berechnet, und der dritte bey dem Pole P entweder gegeben, oder durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden, im Falle, daß der Bogen groß wäre. Nebst diesem wäre doch MN nicht die wahre Entfernung der Punkte M und N, oder der kürzeste Weg von einem zum andern. 9 Fig. I Taf.

54.

54. Wir wollen die VIII. Aufgabe §. I. auf das nur itzt angeführte Beyspiel (48) anwenden. In der
21 Fig. III Taf. 21. Fig. (III Taf.) sey αMN eben die Ellipse, die wir zuvor durch OMN angezeigt haben. Es ist klar, daß der Winkel, unter dem die kleinere Achse der Ellipse αMN von der Normale in N geschnitten wird, das Complement des φ sey. Da nun die Polhöhe N in dieser Ellipse (51), oder φ = 50° 37′ 0″, ist sein Complement 39° 23′ 0″. Das Complement der Polhöhe dieses Punkts in der Elliptoide ist 46° 13′ 30″; den Winkel αKP = *cd* haben wir 26° 28′ 49″,5 gefunden; sein Complement ist also 63° 31′ 10″,5; und es steht (11) *sin.* 46° 13′ 30″ : *sin* 39° 23′ 0″ = *sin.* 63° 31′ 10″,5 : *cos.* PNα. Aus diesem finde ich PNM = 38° 8′ 9″. In dem sphärischen Dreyecke *cba*
9 Fig. I Taf. (9 Fig. I Taf.) haben wir *cba* = 38° 8′ 32″,5 bekommen, die Differenz von dem Elliptischen beträgt 0° 0′ 23″,5.

21 Fig. III Taf. Das Supplement des Winkels PMN (denn er ist stumpf) oder PMα finde ich auf eben diese Art 41° 59′
9 Fig. I Taf. 11″,6; in dem sphärischen Dreyecke der 9ten Figur (I Taf.) ist *cad* = 41° 59′ 8″; die Differenz ist nur 3″,6. Man sieht, daß der elliptische Winkel N kleiner, M hingegen größer sey, als der entsprechende sphärische; es ist doch allemal der Unterschied klein.

55. Wir haben noch eine andere Auflösung dieser
21 Fig. III Taf. Aufgabe, und es ist folgende. Ich setze (21 Fig. III Taf.) die Plane des Meridians PMD, und der Ellipse αMN schneiden sich in der Linie MK; die Normale des Meridians sey M*g*, die Normale der Ellipse αMN aber MO. Man lasse aus K auf diese die Perpendikel K*m*, K*n* fallen, so ist klar, daß diese eben die Lage gegen einander haben, welche die Tangenten in M des Meridians MP, und der Ellipse Mα haben, und wenn man

den

den Winkel mKn findet, findet man auch den elliptischen Winkel αMP, und dessen Nebenwinkel PMN. Man suche also in dem aus dem Mittelpunkte K beschriebenen Dreyecke den Winkel abc, den die Plane des Meridians und der Ellipse αMN einschließen. Dann setze man $1 : \sin.$ MgP, oder $\cos.$ der Polhöhe des Punktes M in der Elliptoide $=$ Kg : Km, so hat man Km. Item

$$1 : \cos.\ PK\alpha = Kg : KO,$$

$$\text{und}\ 1 : \sin.\ \alpha OM = KO : Kn$$

zusammengesetzt $1 : \cos.\ PK\alpha \times \sin.\ \alpha OM = Kg : Kn$. Aus diesen findet man Kn.

Es steht auch $1 : \sin.\ \alpha KP = Kg : Og$; und da OM jederzeit auf OS perpendikulär steht, auch die Normale der Ellipse SM mit der Normale des Meridians Mg eintrifft, steht wieder $\sin.\ OMg : 1 = Og : MO$; und zusammengesetzt wird $\sin.\ OMg : \sin.\ \alpha KP = Kg : MO$, oder $MO : Kg = \sin.\ \alpha KP : \sin.\ OMg$. Die Analogien $1 : \cos.\ \alpha OM = KO : nO$; $1 : \cos.\ MgP = 1 : \sin.$ der Polhöhe des Punktes M in der Elliptoide $= Kg : mg$, geben nO und mg, welche man von MO und Mg abzieht, und man hat in dem Dreyecke Mmn die Seiten Mm, Mn, und den enthaltenen Winkel mMn, folglich findet man mn; in dem Dreyecke mKn werden demnach drey Seiten gegeben, aus welchen man den Winkel mKn sucht, welchen die Tangenten der Ellipsen in M enthalten.

56. Man kann auch diesen auf folgende Art finden. Man suche erstens den Winkel MKα, und den Mitwinkel der Polhöhe des Punktes M in der Ellipse αMN, oder den Winkel MOx; die Differenz dieser Winkel ist KMO. Gleichfalls suche man zweytens die Winkel MKP, MgP; ihre Differenz giebt KMg. Man stelle sich vor, in der 22 Figur (III Taf.) sey MK der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ellipsen αMN, und PMD; 22 Fig. III. Taf.

MO die Normale der ersten; Mg die Normale der zweyten in M. Wenn Km auf Mg, Kn auf MO perpendikulär sind, ist klar, daß MKm, MKn die Complemente der Winkel gMK, OMK sind. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte K in dem Plane des Meridians den Cirkelbogen $M\mu = MKm$, in dem Plane der Ellipse αMN den Bogen $M\nu = MKn$, und endlich in dem Plane der Linien Km, Kn den dritten $\mu\nu$. In dem sphärischen Dreyecke $\mu M\nu$ hat man also die Seiten $M\mu$, $M\nu$, und den Winkel $\mu M\nu$, der dem sphärischen *abc* in der 23ten Figur gleich ist, und suchet die Seite $\mu\nu$, die den Winkel *m*K*n* mißt. Diese Methode getraue ich mich nicht durch den gemeinen Gebrauch der Logarithmen auf den vorher berechneten Winkel M anzuwenden, indem ich die Bögen $M\mu$, $M\nu$ 89° 59′ 46″,8, und 89° 59′ 56″,3 finde, bey welchen die Logarithmen sehr unsicher werden, und in beschwerlichere Berechnungen mich einzulassen, nur allein eines Beyspieles wegen, habe ich die Geduld nicht. Es ist mir genug die Methode erwiesen zu haben.

57. Wenn mir in dem elliptoidischen Dreyecke MPN
24 Fig. IV Taf. (24 Fig. IV Taf.) die drey Winkel gegeben wären, um die Seiten zu finden, wäre es nach der Methode der VIII. Aufgabe §. I. eine unbestimmte Aufgabe. Es sey $\alpha\lambda$ die kleinere Achse der Ellipse αMN, welche in K die Achse der Elliptoide schneidet. Mg sey die verlängerte Normale des Meridians PMD, welche in *g* an die Achse PQ stößt; MO die Normale in M der Ellipse αMN, so wird die in O in dem Plane des Meridians APB auf $\alpha\lambda$ aufgerichtete Perpendikulärlinie OS durch *g* gehen, und die Ellipse SM, deren Plan durch SO, MO geht, auf αMN in M perpendikulär seyn, ihre Normale in M wird mit der Normale Mg des Meridians eintreffen, und PMS wird das Complement

des

des Winkels αMP seyn, wie wir im vorigen erwiesen haben. Wenn man also auf dem Plane des Meridians PMD aus dem Mittelpunkte g den Cirkelbogen bd von der Achse PQ bis an die Normale Mg beschreibt, auf dem Plane des Meridians APB (der durch $\alpha\lambda$ geht) den Bogen bc, und endlich auf dem Plane der Ellipse SM den Bogen dc, hat man in dem sphärischen Dreyecke nichts, als den Winkel bdc, oder den Mitwinkel des gegebenen PMα.

58. Wenn die Normale in N des Meridians PNE die Achse PQ in γ, und die Normale in N der Ellipse αMN die Achse $\alpha\lambda$ in o durchschneidet, und os in dem Plane des Meridians APB auf $\alpha\lambda$ senkrecht steht, wird sie durch γ gehen, und die Cirkelbögen aus dem Mittelpunkte γ auf dem Plane des Meridians PNE zwischen der Achse PQ, und der Normale Nγ, nämlich $\beta\delta$; auf dem Plane des Meridians APB, nämlich $\beta\varkappa$; und endlich $\varkappa\delta$ auf dem Plane der Ellipse sN, deren Plan durch os, No geht, geben wieder ein sphärisches Dreyeck $\beta\delta\varkappa$, im welchen allein der Winkel $\beta\delta\varkappa$, oder das Complement des gegebenen elliptoidischen Winkels N bekannt ist. Da aber die Dreyecke bdc, $\beta\delta\varkappa$ verschiedene Mittelpunkte g, γ haben, wollen wir sie auf einen reduciren.

59. Indem os, OS parallel sind, und in einem Plane des Meridians APB liegen, beschreibe man aus g einen Bogen βk mit dem Halbmesser βg, und er wird dem $\beta\varkappa$ ähnlich seyn, indem sie gleiche Winkel $\beta\gamma\varkappa$, βgk messen. Aus g ziehe man in dem Plane des Meridians PNE gn mit γN parallel, und beschreibe mit dem Halbmesser $g\beta$ auf eben diesem Plane den Bogen $\beta\varepsilon$, so werden auch die Bögen $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$ ähnlich seyn; folglich wenn aus eben dem Mittelpunkte g auf dem Plane der Linien gS, gn der dritte Bogen $k\varepsilon$ beschrieben wird, hat man zwey Dreyecke $\beta\delta\varkappa$, $\beta\varepsilon k$, in welchen

kein anderer Unterschied zu finden ist, als daß ihre Halbmesser ungleich sind, indem der Winkel bey β der nämliche verbleibt, und zwischen ähnlichen Seiten enthalten wird, die man deswegen als gleiche, obschon auf zwey verschiedenen Sphären ansehen muß. Aus eben dieser Ursache, wenn man aus g zwischen Pg und gS den Bogen bc, zwischen Pg und ng den Bogen be; zwischen gS und ng den Bogen ce mit dem Halbmesser gb beschreibt, sind die Dreyecke ebc, $\varepsilon\beta\varkappa$ gleich, und man hat die Dreyecke dbc, ebc aus dem nämlichen Mittelpunkte g. In dem ersten ist nur der Winkel bdc; in dem zweyten allein bec gegeben.

60. Man beschreibe mit eben dem Halbmesser gb auf dem Plane der Linien Mg, ng noch einen Bogen de. Wir haben erwiesen, daß bd das Complement der Polhöhe des Punktes M in der Elliptoide sey, welche Polhöhe ich $= \Phi$ setze; bcd sey dem MOα gleich, oder dem Complemente der Polhöhe des Punkts M in der Ellipse αMN. bc ist allemal das Complement des Winkels αKP, unter dem sich die Achsen der Elliptoide, und der Ellipse αMN schneiden. Die Polhöhe des M in der Ellipse αMN nenne ich $=$ F, αKP aber $=$ K. Eben dieses bedeuten φ, f und K im Ansehen des Punktes N.

In dem Dreyecke dcb steht $\sin. bdc : \sin. bc = \sin. bcd : \sin. bd$,

und in dem Dreyecke ebc, $\sin. bc : \sin. bec = \sin. be : \sin. bce$.

Zusammengesetzt $\sin. bdc : \sin. bec = \sin. be \times \sin. bcd : \sin. bd \times \sin. bce$,

das ist $\cos. M : \cos. N = \cos. \varphi \times \cos. F : \cos. \Phi \times \cos. f$,

oder $\cos. M : \cos. N = \dfrac{\cos. F}{\cos. \Phi} : \dfrac{\cos. f}{\cos. \varphi}$.

Es

Es sind also die Cosinus der gegebenen elliptoidischen Winkel gerade wie die Cosinus der Polhöhen der Punkte M, N in der Ellipse αMN, und umgekehrt wie die Cosinus ihrer Polhöhen in der Elliptoide.

In dem Dreyecke *ebc* steht auch *sin. ec* : *sin. ebc* = *sin. bc* : *sin. bec*,
und in dem Dreyecke *dbc* *sin. dbc* : *sin. cd* = *sin. bdc* : *sin. bc*
zusammengesetzt *sin. dbc* × *sin. ec* : *sin. ebc* × *sin. cd* = *sin. bdc* × *sin. bc* : *sin. bec* × *sin. bc* = *sin. bdc* : *sin. bec*, oder *sin.* APD × *sin.* Nγ*s* : *sin.* APE × *sin.* MgS = *cos.* M : *cos.* N. Man sieht, daß hier mehr unbekannte Größen zusammen kommen, und die Auflösung in dieser Methode nicht möglich sey.

61. Hingegen wäre die Aufgabe durch zwey auf der Elliptoide gegebene Punkte M, N, die eine gleichfalls gegebene Differenz der Meridiane haben, eine Ellipse beschreiben, die mit den Meridianen gegebene Winkel enthält, vollkommen bestimmt. Denn allhier würden in dem Dreyecke *dbe* die Seiten *db*, *be* sammt dem Winkel *dbe* gegeben, und man fände *de*. In dem Dreyecke *dbl* hätte man die Winkel *d*, *b*, und die Seite *db*. Daraus könnte man *dl*, *bl*, und den Winkel *dlb* (dessen Nebenwinkel *dle* ist) suchen. *bl* von *be* abgezogen gäbe *le*, und in dem Dreyecke *dle* wären *dl*, *el* und der Winkel *dle* bekannt. Aus diesem suchte man *lde*, *led*, und wenn man zu dem letzteren annoch *bec* hinzusetzte, hätte man in dem Dreyecke *dce* die Seite *de*, und die Winkel *cde*, *ced*, und fände *dc*, *ec*. Dann hätte man in der Dreyecke *dcb* die Seiten *db*, *dc*, und den Winkel *bdc*; man fände hieraus *dcb* = MOα; *dbc*, dessen Supplement APD, und *bc*, dessen Complement αKP. Gleichfalls wäre in dem Dreyecke *ebc* nebst

eb, *ec* der Winkel *bec* bekannt; daraus man *bc* (mithin αKP), $bce = \mathrm{N}o\alpha$, und *ebc* finden könnte, welcher das Supplement des APE ist; mithin hätte man alles, was zur Bestimmung der Ellipse αMN nothwendig ist.

62. Wenn nebst den drey Winkeln MPN, PMN, oder PMα, PNM, auch der Winkel αPM, und die Seite *bd* gegeben wäre, hätte man in dem Dreyecke *dbl* die Winkel *b*, *d*, und *bd*, aus welchen man *bl*, *ld*, und *bld* suchen könnte. Dann wäre in dem Dreyecke *blc* die Seite *bl*, der Winkel *blc*, wie auch $lbc = 180° - \alpha\mathrm{PM} - \mathrm{MPN}$ bekannt, und man fände *bc*, das Complement des Winkels αKP, wie auch $bcl = \mathrm{MO}\alpha$. Endlich in dem Dreyecke *bce*, oder $\beta\varkappa\delta$ hätte man $\delta\beta\varkappa$, $\beta\delta\varkappa$, und $\beta\varkappa$. Aus diesen würde $\beta\delta$ = Complement PN, $\beta\varkappa\delta = \mathrm{N}o\alpha$ gefunden. In der 9 Figur (I Tafel) stelle
9 Fig. I Taf. man sich ein bey *d* rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck *dea* vor, im welchen $dc = \alpha\mathrm{KP}$ der 24ten Figur, und $dca = \alpha\mathrm{PM}$; so findet man $ca = \mathrm{PKM}$, und da man PM hat, folglich auch M*m* und *m*C, steht $1 : cot.\ \mathrm{PKM} = \mathrm{M}m : m\mathrm{K}$, und man hat $\mathrm{CK} = m\mathrm{K} - \mathrm{MR}$. Aus K, M, N könnte man demnach die Ellipse αMN
24 Fig. IV Taf. (24 Fig. IV Taf.) vollkommen bestimmen.

21 Fig. III Taf. 63. Gleichfalls wenn (21 Fig. III Taf.) alle drey Seiten PM, PN und NM durch die Ordinaten auf M, und N, und durch die Achsen der Ellipse αMN gegeben wären; hätte man die Winkel (ich setze, $\varkappa$ sey der Mittelpunkt dieser Ellipse) $\alpha\varkappa$M, $\alpha\varkappa$N, mithin auch αOM, αoN; Item MO, M*g*, $Og = \sqrt{\mathrm{M}g^2 - \mathrm{MO}^2}$; auch $\mathrm{M}g : \mathrm{MO} = 1 : \mathit{fin}.\ \mathrm{M}g\mathrm{S}$. Eben dieses versteht sich
24 Fig. IV Taf. (24 Fig. IV Taf.) von N*o*, Nγ, und Nγ*S*. In dem Dreyecke *dbc* wäre *db*, *dc*, und *bcd* bekannt, indem $bcd = \alpha\mathrm{OM}$, und man fände bdc = Compl. PMα, wie auch den Winkel *dbc*. Eben also in dem Dreyecke $\delta\beta\varkappa$ hätte

man

man $\varkappa\delta$, $\beta\delta$, $\beta\varkappa\delta$ = N$o\alpha$; daraus bekäme man $\beta\delta\varkappa$ = Compl. N, und $\delta\beta\varkappa$. Wenn $\delta\beta\varkappa$ von *dbc* abgezogen würde, verbliebe *dbe* = MPN, und auf diese Weise würden durch die drey gegebenen Seiten die Winkel be- bestimmt.

64. Es könnten noch mehrere Voraussetzungen gemacht werden, durch welche in der Aufgabe alles bestimmt würde, allein es ist mein Vorhaben nicht, eine elliptoidische Trigonometrie zu suchen, welchen Stoff schon Hr. Leonh. Euler behandelt hat. Dieses bemerke ich allein, daß es mir scheint, es müßen in einem sphäroidischen Dreyecke, mehr denn drey Stücke gegeben werden, um die übrigen zu finden, in dem die Ellipsen weder ähnlich sind, weder ihre Plane in eben dem Punkte durch die Achse der Sphäroide gehen; gleichwie in einer Sphäre, wenn kleinere Cirkelbögen gebraucht würden, dieses nothwendig wäre.

65. Wenn alle drey Bögen (25 Fig. IV Taf.) MN, NO, OM von den Meridianen verschiedene Ellipsen wären, wäre um diese, und die Winkel zu finden genug, wenn die Polhöhen der Spitzen M, N, O, und die Differenzen der Meridiane, die durch dieselben beschrieben werden, nämlich DPE, FPE, gegeben wären. Denn man könnte es auf drey Dreyecke MPN, MPO, OPN reducieren, in denen zwey Seiten Meridianbögen sind, wie ein jeder selbst sieht. Allein von diesem genug. 25 Fig. IV Taf.

Anhang

zur XI. Aufgabe §. I. Nro. 33.

Um die Methode, der ich mich bey dieser Aufgabe bedient habe, in ein helleres Licht zu setzen, will ich sie auch auf eine Hyperboloide, und Paraboloide anwenden, jedoch ohne mich um die Berechnung zu besorgen. Zu diesem Ende sey folgender

26 Fig. V Taf. Lehnsatz. SO, fo (26 Fig. V Taf.) sind entgegengesetzte Hyperbeln. Wenn aus φ, dem Brennpunkte der Hyperbel fo, mit dem Halbmesser Sf, oder der Querachse, ein Cirkelbogen DI beschrieben wird, und eine Linie φO auf die Hyperbel SO gezogen, die den Bogen DI in I schneidet, wird die Normale in O, oder OT mit fI, welche den Punkt I mit dem Brennpunkte f verbindet, parallel seyn.

Beweis. Da $\varphi I = fS$, wird $IO = fO$, und wenn If in t gleich abgetheilet wird, ist tO die Tangente in O; es ist aber ftO ein rechter Winkel; und die Normale OT ist ebenfalls auf die Tangente tO in O perpendikulär, folglich sind If, OT parallel. W. zu erw. w.

27 Fig. V Taf. Zusatz. In der Parabel (27 Fig. V Taf.) wird φO mit DT parallel; und da die Achse unendlich, wird DI eine gerade Linie, If aber verbleibt mit OT parallel, und wird ihr gleich.

I. Aufgabe. Wenn auf der Hyperboloide die Punkte
28 Fig. V Taf. M, N sammt dem Winkel ASB (28 Fig. V Taf.) gegeben werden, den kürzesten Bogen zwischen ihnen zu finden.

Auflösung. Ich setze zum voraus, daß man aus dem gegebenen, wie in der Elliptoide, die Perpendikel

ME,

ME, MF, wie auch FC, FC ꝛc. finden könne; item die Neigung der Senne MN gegen die Grundfläche der Hyperboloide. Durch den Brennpunkt f ziehe man mfn mit der Senne MN parallel, und wenn Sf der Abstand des Brennpunktes von dem Scheitelpunkte S, SK aber die Hälfte der Querachse, setze man $fS : SK = fK : X$; item (wenn $SK = a$, und die Hälfte der Mitachse $= b$), $a : b = X : \frac{bX}{a}$, und beschreibe durch K mit den Halbachsen X, und $\frac{bX}{a}$ eine Hyperbel $\alpha K \beta$, durch deren Umdrehung um KC eine neue Hyperboloide entsteht, welche durch einen auf XSY senkrechten Plan $fP\lambda L$ also geschnitten wird, daß der Schnitt durch f gehe, und zugleich auf mfn in f perpendikulär sey. Den Plan GMNH, der mit XSY parallel ist, und in dem die Perpendikel ME, NF sich befinden, verlängere man sammt den Perpendikeln in $\mu\lambda\nu$, und schneide die Hyperboloide noch einmal durch den Plan $\mu L \nu$, der zugleich durch mfn geht. Diese zwey Plane PLf, $\mu f \nu$ müßen sich in einer Linie LIf durchschneiden. Es sey φ der Brennpunkt der der XSY entgegengesetzten Hyperbel; man beschreibe aus dem Mittelpunkte φ mit dem Halbmesser $\varphi D = 2SK$ einen Cirkelbogen DI, der durch die Linie Lf geht, und ziehe aus φ durch I die Linie φIO, bis sie in O an die innere Hyperboloide stosse. Wenn man endlich durch M, O, N noch einen Schnitt macht, wird MON der gesuchte Bogen seyn.

Beweis. Es ist klar, daß mfn auf den Plan PLf perpenpikulär stehe, folglich auch auf fL. Aus dem Lehnsatze ist fIL mit der Normale OT parallel; und da Lf mit OT, mfn mit MRN parallel, muß auch OT durch MRN in R gehen, und auf sie perpendikulär seyn.

Es ist also ORT die Normale der Hyperbel SOZ, und auf den Berührungsplan der Hyperboloide in O senkrecht, mithin auch die Normale des Bogens MON; und wenn der Schnitt QOT mit PLf parallel gemacht wird, ist nicht allein QO auf MON perpendikulär, sondern OT ist auch die Normale des Schnittes QO, wie wir bey der Elliptoide erwiesen haben, folglich MON der kürzeste Bogen. W. zuf. w.

II. Aufgabe. Die Punkte M, N, und der Winkel APB werden auf einer Paraboloide gegeben; man ver-
29 Fig. V Taf. langt den kürzesten Bogen zwischen M und N. (29 Fig. V Taf.)

Auflösung. Man beschreibe mit dem nämlichen Parameter eine mit XPY gleiche Parabel ΠπV, doch also, daß P ihr Brennpunkt werde, mithin Pf = PΠ; drehe diese um die gemeinschaftliche Achse ΠC, damit eine andere Paraboloide gestaltet werde. Den Plan GMNH, in dem die Perpendikel ME, NF liegen, verlängere man, bis er die äußere Paraboloide in roR schneide. Durch den Brennpunkt f ziehe man die Linie ufv mit der Senne MN parallel; schneide beyde Paraboloiden mit einem Plane πof, der durch f geht, und auf ufv in f perpendikulär steht. Durch o, allwo πo durch roR geht, beschreibe man aus Π die Parabel ΠoTd, und ziehe in deren Plane ΠQ auf die Achse ΠC senkrecht, wie auch aus f die Linien foQ durch o, welche den Punkt Q der Tangente ΠQ bestimmt. Aus Q lasse man auf die Grundfläche der Paraboloide einen Perpendikel QTOt fallen, der durch die Parabel POD der inneren Paraboloide in O geht. Endlich schneide man die innere Paraboloide durch M, O, N, so hat man den gesuchten Bogen MON.

Beweis.

Beweis. Es ist aus den Eigenschaften der Parabel bekannt, daß indem die Bögen ΠoT, PO gleicher Parabeln, gleiche Ordinaten haben; (denn QTOt ist mit ΠC parallel), auch ihre Normale in T und O gleich, und parallel seyn müßen. Es ist aber die Normale in T mit *f*Q gleich und parallel (nach dem Zusatze des oben angeführten Lehnsatzes), folglich ist auch die Normale in O der Parabel POD mit *f*Q gleich und parallel. Nun ist Q*f* auf *ufv* perpendikulär, mithin auch OK auf die Senne MN; und ist demnach OK auch die Normale des Bogens MON, und des Bogens SO, wenn man noch einen Schnitt durch OK macht, der auf den Plan MNO perpendikulär steht.

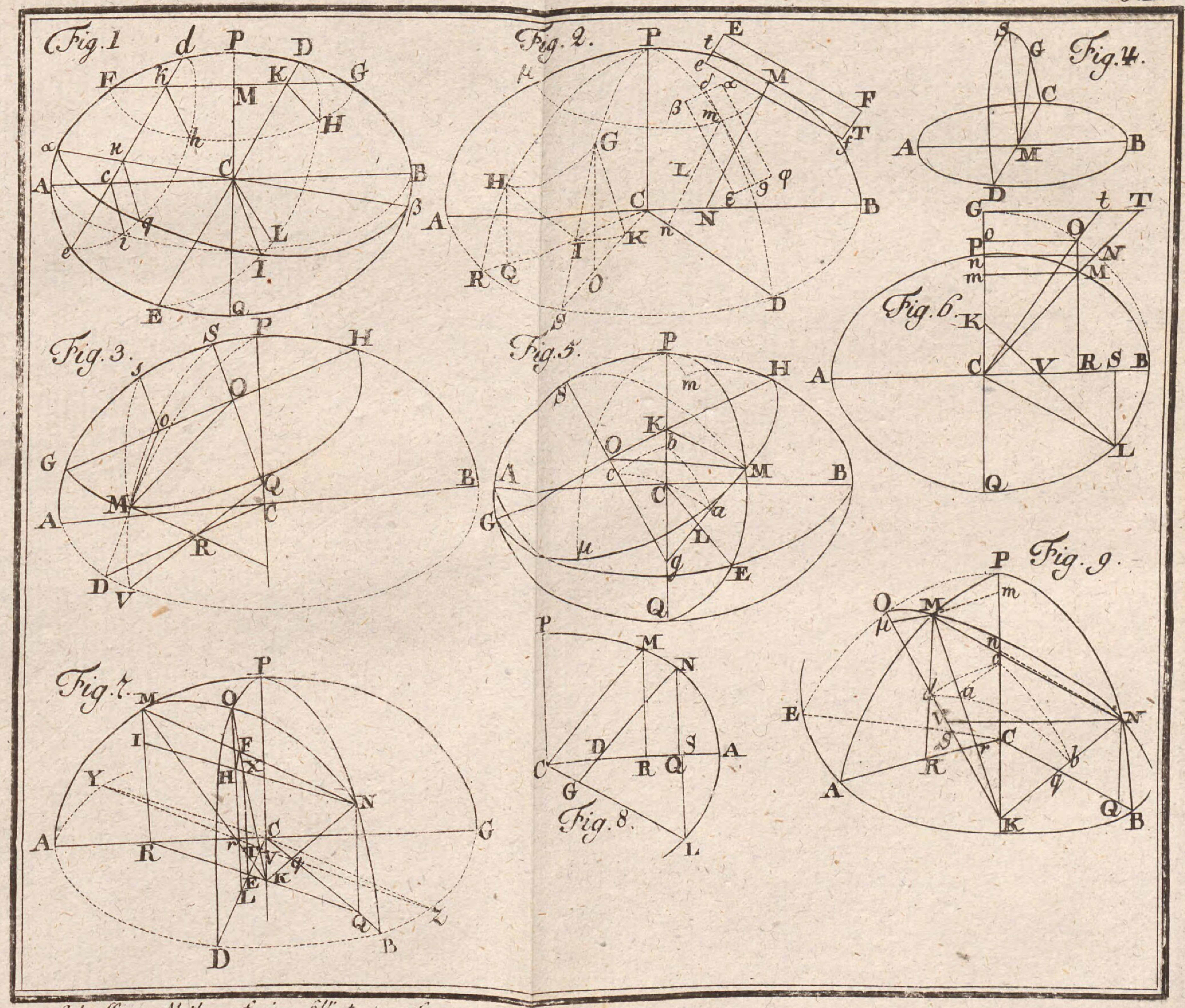
Man ersieht, daß die Fortsetzung des Beweises, den wir für die Ellipsoide gegeben haben, sowohl hier auf die Paraboloide, als oben auf die Hyperboloide unverändert angewendet werde, nachdem bewiesen worden, daß hier die Bögen MON, SO; dort MON, QO eine gemeinschaftliche Normale haben. W. zuf. w.

Anmerkung. Gleichwie unter den Kegelschnitten ein gewisser Zusammenhang bemerkt wird, der die Ursache so vieler Eigenschaften ist, die sie gemeinschaftlich besitzen; also erstrecket sich auch dieser noch einigermaßen auf die Conoiden, die aus der Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Achsen entstehen; und die Auflösung einer Aufgabe über eine dieser Conoiden führt gemeiniglich auch zur Auflösung über die übrigen. Wenn man dieses, was ich allhier von der Hyperboloide, und Paraboloide im Betreffe des Punktes O angeführt habe, im welchen der kürzeste Bogen, und jener, der auf ihn perpendikulär steht, eine gemeinschaftliche Normale haben, recht überdenkt, wird man gewiß die Uebereinstimmung der Methode bemerken. Warum aber diese bey der Ellipsoide nicht so hell in die Augen fällt, ist die Ursache,

weil

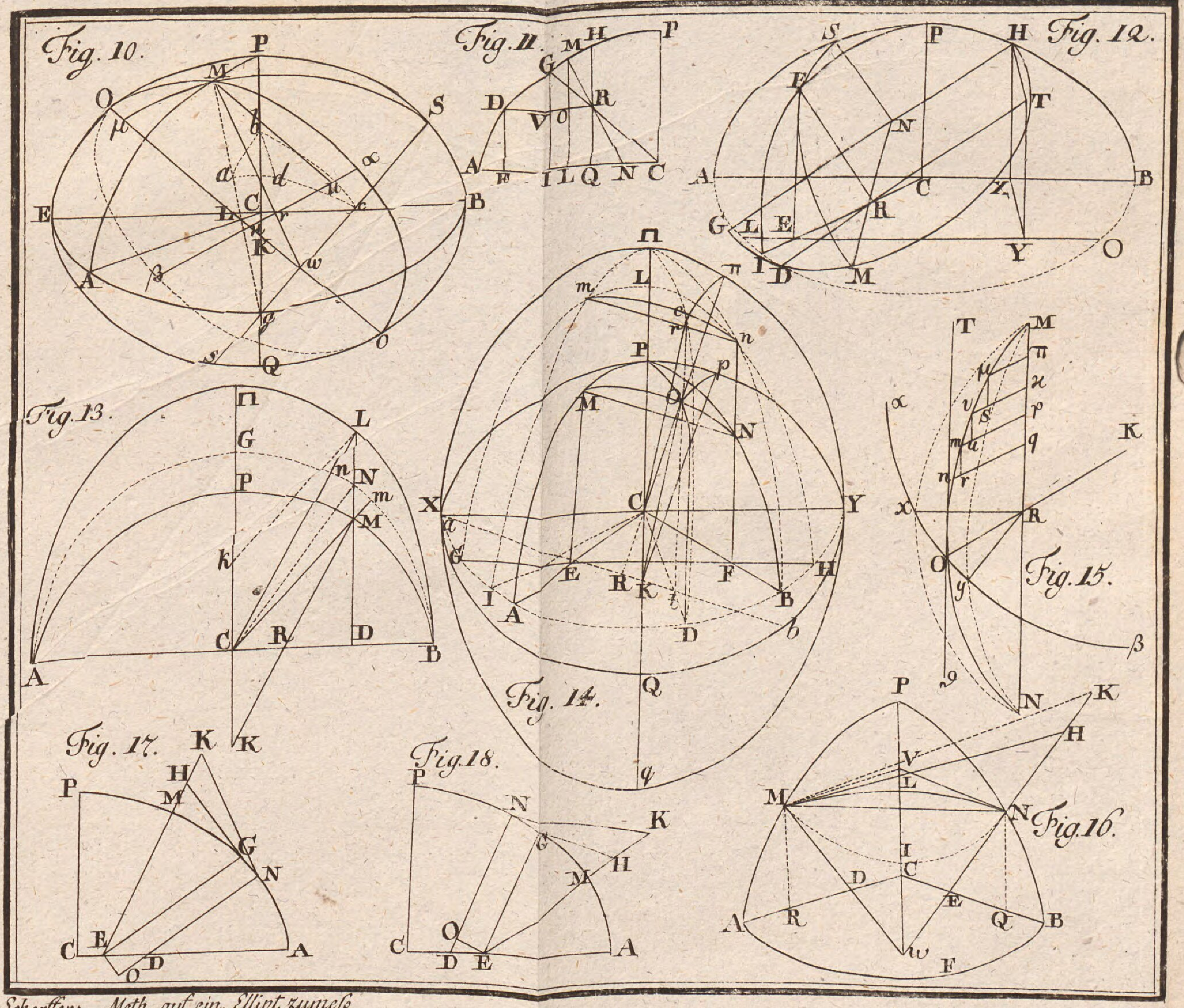
weil der Pol derselben nicht der Hauptscheitelpunkt der Meridiane ist. Wäre die Sphäroide bey dem Pole ver-
30 Fig. V Taf. längert, so könnte man (30 Fig. V Taf.) aus dem Brennpunkte φ mit dem Halbmesser Sf, oder der größeren Achse einen Cirkelbogen DI beschreiben, und die Normale in O (allwo φOI die Ellipse schneidet), nämlich OT, würde ebenfalls mit fI parallel werden. Allein weil dieses bey einer beym Pole zusammengedrückten Elliptoide nicht angeht, konnte ich von dieser Eigenschaft in der Bestimmung des Punktes O keinen Gebrauch machen, und mußte eine andere Ellipse zu Hülfe nehmen, die eben so bequem zu meinem Absehen war.

Tab. I.

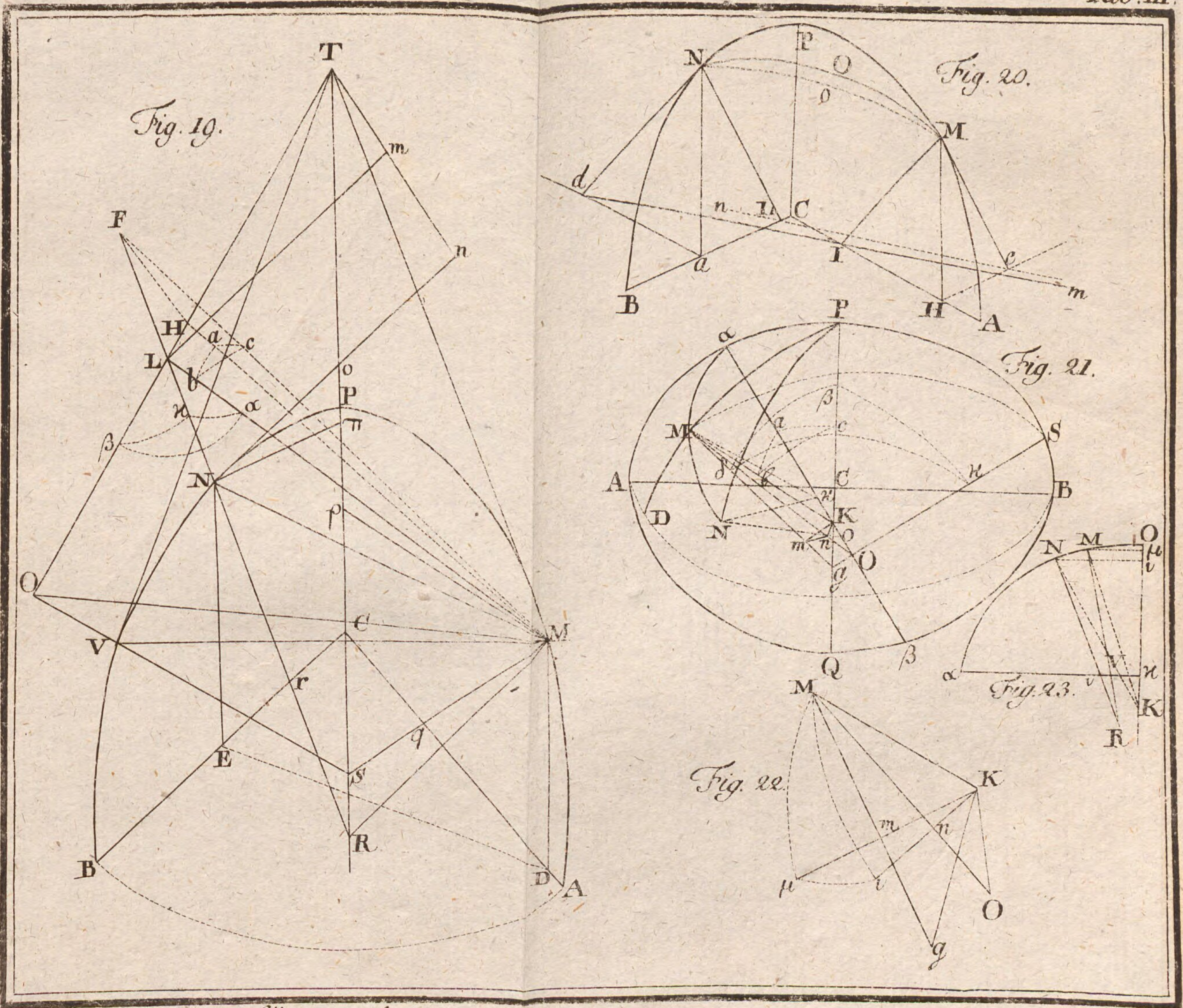


Scherffer Meth. auf ein. Ellipt. zumess.

Tab. II

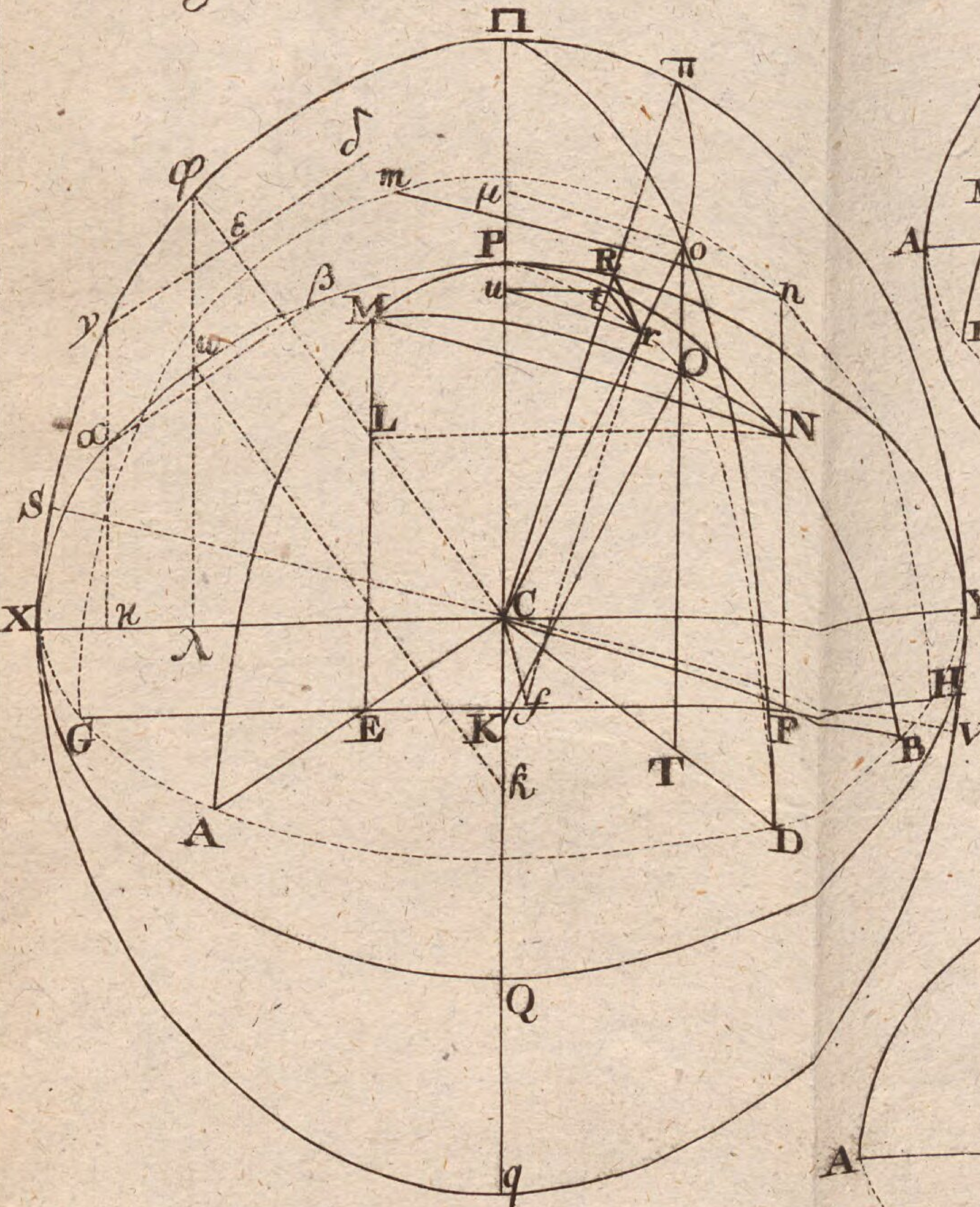


Scherffers Meth. auf ein. Ellipt. zumess



Scherffers Meth. auf ein. Ellipt. zumess.

Fig. 16.



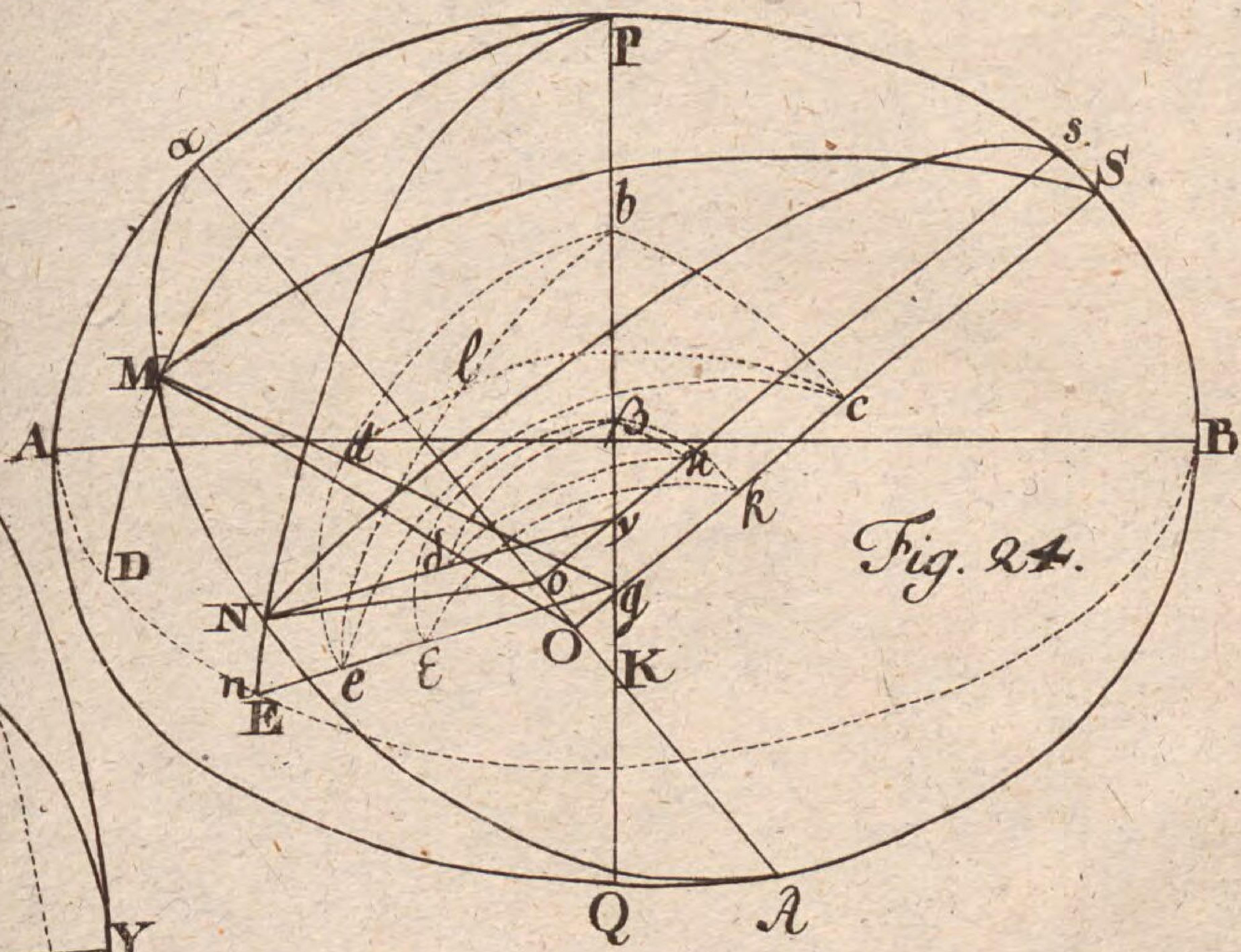
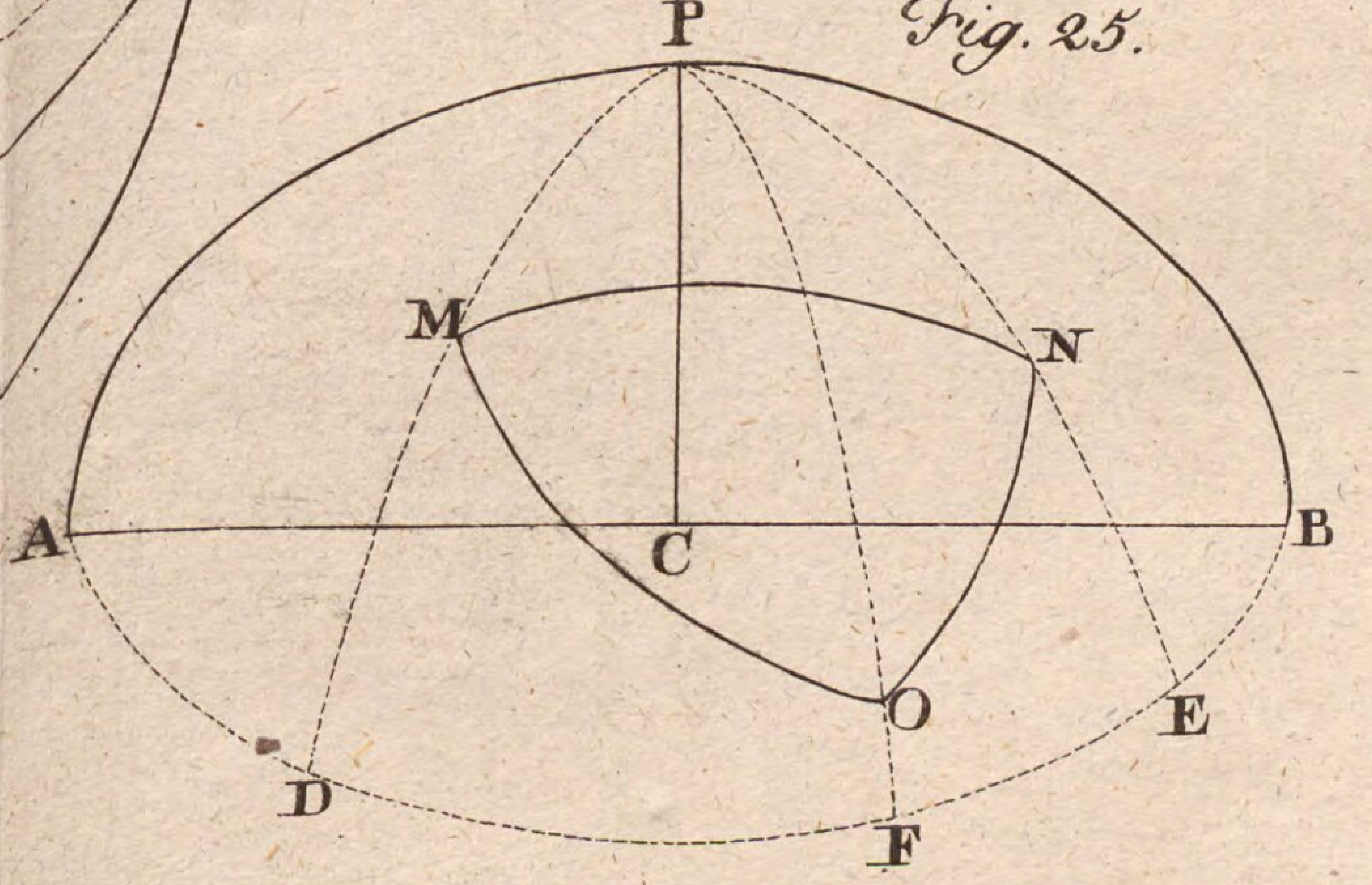
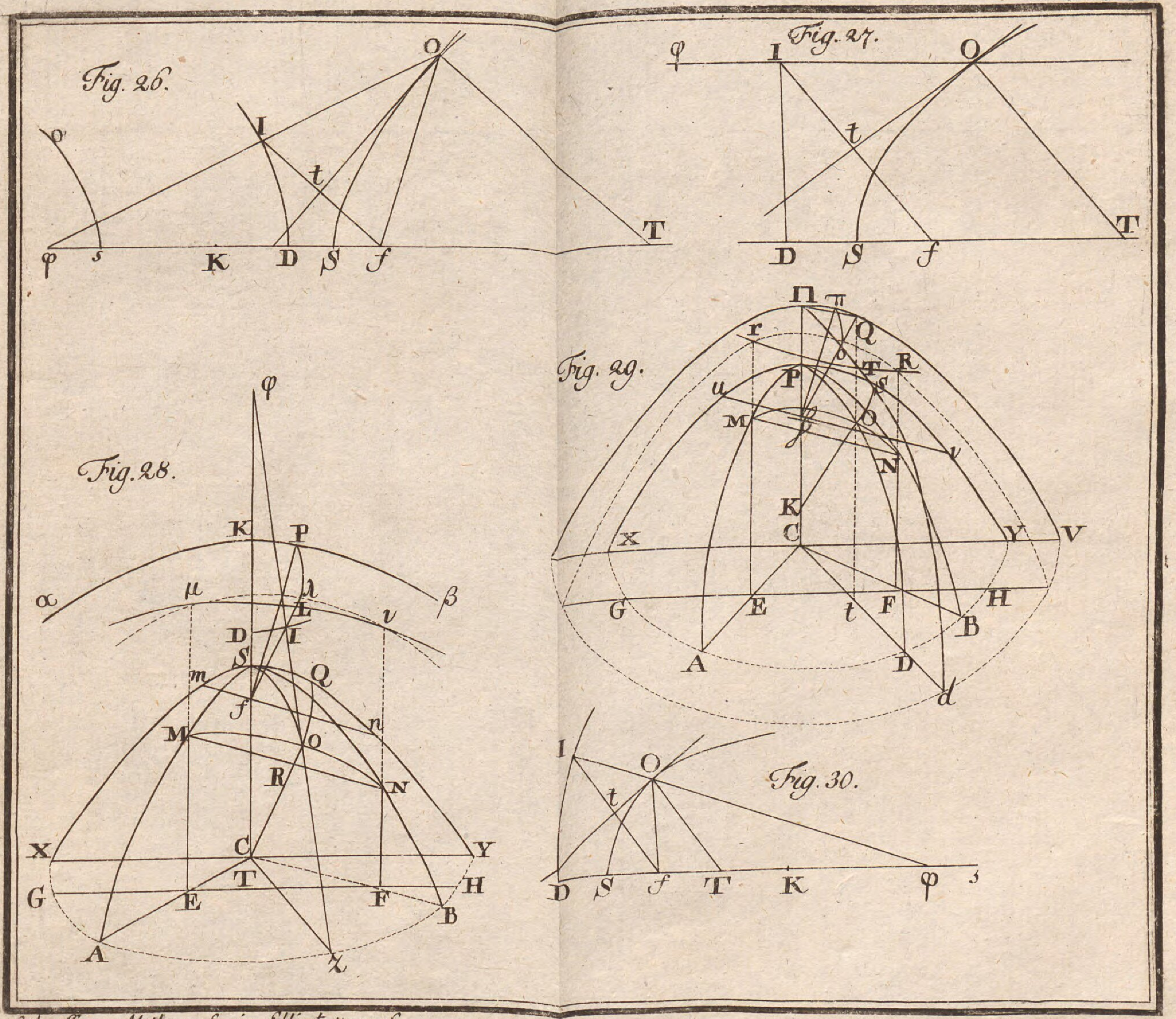


Fig. 24.

Fig. 25.



Tab. V.



Scherffers Meth. auf ein. Ellipt. zumess.

II.

Beyträge zur Lehre

von den

Kegelschnitten

in einigen Aufgaben über dieselben.

Vorbericht.

Die Menge der schönsten Eigenschaften der Kegelschnitte, wenn wir sie auch nur in jenen Büchern aufsuchen, die einen wesentlichen Unterschied der Methode enthalten, verdient Zweifels ohne die Aufmerksamkeit eines Geometers. Allein wenn man so zu sagen nur einige Schritte über die Elementärgeometrie, welche die Kegelschnitte zum Gegenstande hat, hinaus macht, so biethen sich eben so viele andere dar, die man nur darum aus den Anfangsgründen hinweg zu lassen gezwungen wird, weil sie deutlich vorgetragen zu werden eine höhere Methode erfordern. Es ist wahr, daß nachdem derselben einige nur gelegenheitlich bey Auflösung verschiedener Aufgaben sind entdeckt worden, sie sich auch aus sehr bekannten Sätzen für Anfänger faßlich machen lassen; doch geht dieses nicht durchaus an, wenigstens wenn man Bedenken trägt durch eine unmässige Weitläuftigkeit dem Leser beschwerlich zu fallen. Der kürzeste Weg uns dieser Wahrheit zu überführen sind die Beyspiele, derer ich einige in gegenwärtigen Aufgaben vorzutragen gesinnet bin; und gleichwie diese keine gewisse Verbindung leiden, also habe ich mich auch an kein eigenes Gesetze, was die Gattung der Beweise betrifft, gehalten. Ich hoffe, daß obschon die Aufschrift einen nur gar zu bekannten Stoff ver-

spricht,

spricht, doch der geneigte Leser bekennen werde, daß die Sache selbst in nicht viel andern Schriften, wenigstens auf diese Methode sey behandelt worden.

I. Aufgabe.

1. Es werden in der Oberfläche eines gegebenen rechten Kegels AVBG (1 Fig. I Taf.), dessen Achse CV, drey Punkte M, O, N gegeben; man sucht den Punkt K der Achse, im welchen sie von dem Plane geschnitten wird, der durch die drey gegebenen Punkte geht.

1 Fig. I Taf.

Auflösung. Man setze VA : AC = VM : DC = VO : ZC = VN : FC; item VA : VC = MA : MD = OG : OZ = NB : NF. Aus diesem hat man DC, ZC, FC; wie auch MD, OZ, NF. Sind die Punkte M, O, N gegeben, so sind auch A, G, B bekannt, mithin weiß man die Winkel ACG, GCB, und man findet in dem Dreyecke DCF die Seite DF, und CDF; dann in dem Dreyecke DCE die Seiten DE, CE. Man errichte in E auf der Grundfläche des Kegels eine Perpendikulärlinie ER, welche die Senne MN in R schneidet. MQ sey mit DF parallel, so steht MQ oder DF : QN (= NF — MD) = MI oder DE : RI, und daraus hat man RE = RI + MD.

Wenn man aus O durch R eine Linie zieht, muß dieselbe die Achse VC in K schneiden, indem sie in dem Plane CVG liegt. Ko, RP mache man mit CG parallel, und man hat OP = OZ — RE, wie auch RP = EZ = ro = CZ — CE, folglich $RO = \sqrt{(OP^2 + RP^2)}$. Die ähnlichen Dreyecke KOo, KRr geben ro : RO = Ko : KO. In dem Dreyecke KVO hat man

man die Seiten VO, OK sammt dem Winkel KVO = CVG, und findet sowohl VK, als den Winkel VKO. Da nun VK bekannt ist, kann man eben so MK, MKV; NK und NKV finden. W. zuf. w.

2. Zusatz. Wenn man setzen wollte, es wären nicht die Punkte A, G, B, sondern die Sennen MO, ON sammt den Seiten MV, OV, NV bekannt, so könnte man in dem Dreyecke MVO aus den drey gegebenen Seiten den Winkel MVO suchen, und setzen *sin.* MVO oder *sin.* AVG : *sin.* ACG = AC : AV. Eben so verfährt man mit dem Winkel OVN.

3. II. Aufgabe. Man sucht die Gattung, und die Hauptachsen des Kegelschnittes, wenn der Plan durch die in der Oberfläche gegebenen Punkte M, N (2 Fig. 1 Taf.) und den Punkt K der Achse eines gleichfalls gegebenen rechten Kegels geht. 2 Fig. 1 Taf.

Auflösung. Da M und N gegeben sind, hat man nebst VM, VN entweder in der Grundfläche des Kegels die Punkte A, B, oder doch die Senne MN, und es ist nach dem Zusatze voriger Aufgabe der Winkel ACB bekannt. Man ziehe aus K auf M und N Linien, und beschreibe aus dem Mittelpunkte K mit einem beliebigen Halbmesser K*a* die Bögen *ab* in der Fläche der Linien KM, KN; *ac* in der Fläche AVC, und *cb* in der Fläche CVB, so hat man in dem sphärischen Dreyecke *acb* den Winkel *acb*. In den geradlinichten Dreyecken VKN, VKM sind nebst dem Winkel NVK = MVK die Seiten NV, KV; MV, KV bekannt, und man findet die Winkel NKV, MKV, das ist, die Seiten *cb*, *ca* des sphärischen Dreyeckes, und da der Winkel *acb* schon bekannt ist, findet man den Bogen *ab*, oder den Winkel MKN, wie auch den Winkel *cab*. Dann ziehe

man cd auf ab perpendikulär, und suche cd = VKO, wie auch acd = ACG.

Es ist klar, daß der Plan CVOG auf den Plan MON senkrecht stehe, mithin OKo die längere Achse des Kegelschnittes sey, dessen kleinere Achse zu bestimmen ist, indem man aus der Lehre von den Kegelschnitten weiß, daß wenn OH, oh auf die Achse des Kegels senkrecht gezogen werden, die Hälfte der kleineren Achse die mittlere Proportionallinie zwischen OH und oh sey, wie ich in folgender Anmerkung zum Ueberfluße darthun werde, und man sich dieses unterdessen in der 3 Figur
3 Fig. I Taf. (I Taf.) vorstellen kann. Nun aber haben wir den Winkel VKO gefunden, und in dem Dreyecke KVO ist der Winkel KVO sammt der Seite VK bekannt, mithin hat man auch KOV, und findet VO, KO. In dem Dreyecke oVO haben wir also VO, VOo, oVO = 2KVO, und es steht $\sin.$ VoO : $\sin.$ oVO = VO : oO. Man ziehe KO von oO ab, so bleibt oK, und wenn man setzet 1 : $\sin.$ HKO = KO : HO = Ko : oh, so hat man HO und ho, folglich auch $\sqrt{HO \times ho}$, oder die Hälfte der kleineren Achse, sammt der größeren Oo, W. zuf. w.

4. Zusatz. Wenn der Winkel VKO mit LVC gleich wird, so ist der Kegelschnitt eine Parabel, indem Oo mit LV parallel wird; ist aber VKO kleiner, als LVC, so hat man eine Hyperbel; ist endlich VKO größer, als LVC, eine Ellipse.

5. Anmerkung. Meinem Versprechen gemäß muß
4 Fig. I Taf. ich erweisen, daß wenn (4 Fig. I Taf.) ein Kegel MLN durch SV geschnitten wird, die kleinere Achse der Ellipse $\sqrt{(GS \times VK)}$ sey. Man ziehe den Durchmesser eines Cirkels HI, der die größere Achse der Ellipse in p schneide;

es

es sey SV $= a$, Sp $= x$, die kleinere Achse $= v$, so wird die Gleichung $y^2 = \frac{v^2}{a^2} (ax - xx)$, und $a^2y^2 = v^2 (ax - xx)$, folglich $a^2 : ax - xx = v^2 : y^2$. Die ähnlichen Dreyecke VGS, VHp geben

SV : pV $=$ GS : Hp; und die Dreyecke VSK, pSI geben

SV : Sp $=$ VK : pI;

zusammengesetzt SV² : Sp $\times$ pV $=$ GS $\times$ VK : Hp $\times$ pI, das ist $a^2 : ax - xx =$ GS $\times$ VK : y^2; wir haben aber $a^2 : ax - xx = v^2 : y^2$; es muß also GS $\times$ VK $= v^2$ seyn.

Wenn in dem entgegengesetzten Kegel BLA durch den Schnitt SfP eine Hyperbel gestaltet wird, und wieder S$f = a$, fP $= x$, wird die Gleichung $a^2y^2 = v^2 \times (ax + xx)$, und die ähnlichen Dreyecke GfS, PfA; SFf, SBP geben ebenfalls Sf : fP $=$ GS : PA

Sf : SP $=$ Ff : BP;

zusammengesetzt Sf^2 : SP $\times$ Pf $=$ GS $\times$ Ff : PA $\times$ PB, oder $a^2 : ax + xx =$ GS $\times$ Ff : y^2; indem aber die Gleichung giebt $a^2 : ax + xx = v^2 : y^2$, folgt nothwendig, daß $v^2 =$ GS $\times$ Ff.

6. Lehnsatz. Wenn BA, ED (5 Fig. I Taf.) sich unter einem rechten Winkel in C schneiden, CF auf DE, GC auf AB senkrecht stehen, und FC, GC, AC sich in dem nämlichen Plane befinden, wird GC auf den Plan ADBE perpendikulär seyn. 5 Fig. I Taf.

Beweis. Vermög der Voraussetzung ist AC und FC auf CE senkrecht, folglich ist CE auf den Plan der Linien AC, FC perpendikulär. Man setzet aber auch, AC, FC, GC seyen in dem nämlichen Plane; also steht auch CE auf CG senkrecht. Aus diesem ist klar, daß GC vermög der Voraussetzung auf CA, und auf CE

vermög dessen, was nur itzt gesagt worden, perpendikulär sey, das ist, auf zwey Linien, die sich in dem Plane DAEB in C schneiden, mithin muß GC auf den Plan DAEB perpendikulär seyn. W. zu bew. w.

6 Fig. I Taf. 7. Satz. IOH sey ein Kegelschnitt, zum Beyspiele eine Ellipse (6 Fig. I Taf.), deren größere Achse IH ist; OR sey eine Normale in O. Man schneide den Kegel durch einen andern Plan SOG, der durch OR geht, und auf den vorigen IOH perpendikulär steht; so wird erstens der Bogen SOG auf den Bogen IOH senkrecht seyn. Zweytens werden die Tangente in O des Kegelschnittes SOG, seine Normale OK, und die Normale OR des Kegelschnittes IOH in dem nämlichen Plane seyn. Drittens wird die Normale des Kegelschnittes SOG mit jener eintreffen, welche in dem Plane MCV auf die Seite MV des Kegels in O gezogen wird.

Beweis. Indem die Tangente in O der Ellipse IOH auf ihre Normale OR, und der Plan SOG auf den Plan IOH senkrecht steht, muß sie auch auf alle Linien, die in dem Plane SOG durch O gehen, senkrecht stehn, folglich auch auf die Tangente in O des Kegelschnittes SOG, als die in eben diesem Plane liegt. Nun aber ist es einleuchtend, daß ein Punkt, der einen Kegelschnitt beschreibt, in jedem Punkte desselben, als in O, keine andere Richtung habe, als jene der Tangente; mithin wenn die Tangenten in O beyder Kegelschnitte aufeinander senkrecht stehen, müßen auch ihre Bögen einer auf den andern perpendikulär seyn. W. das erste w.

Das zweyte erhellet aus der Voraussetzung; denn die Tangente und Normale des Kegelschnittes SOG in dem Punkte O sind in einem und dem nämlichen Plane; da nun dieser durch die Normale OR der Ellipse IOH geht, ist klar, daß auch OR sich in dem nämlichen Plane befindet. W. das zweyte w.

End-

Endlich ist in dem Lehnsatze erwiesen, daß wenn (5 Fig. I Taf.) GC, FC, AC in einem Plane sind, und FC auf DE, GC auf AB senkrecht stehen, GC auf den Plan DEAB perpendikulär sey. Nun sieht man, daß DE der Tangente in O der Ellipse IOH der 6 Figur; AB der Tangente in O des Kegelschnittes SOG; FC der Normale OR der Ellipse IOH; und GC der Normale OK des Kegelschnittes SOG entspreche; so muß demnach KO auf den Plan beyder Tangenten perpendikulär seyn.

Man stelle sich vor, der Plan ABDE berühre die Seite VM des Kegels, welche durch O geht, und der Kegel werde durch die Umdrehung um die Seite VC des rechtwinklichten Dreyeckes MVC gestaltet; so ist klar, daß bey dieser Umdrehung der Punkt O einen Cirkel OPN, und die Linie OK, die in dem Plane des Dreyeckes MVC liegt, und auf VM perpendikulär steht, die Oberfläche eines geraden Kegels OPNK beschreiben muß, und immer auf den Plan ABDE senkrecht verbleibe. Ueber dieses sieht man, daß die Tangenten beyder Kegelschnitte in O in eben diesem Plane sind; da wir nun bewiesen haben, daß die Normale OK des Kegelschnittes SOG auf den Plan der Tangenten senkrecht stehe, und auf eben diesen Plan nur eine Perpendikulärlinie aus dem Punkte O kann gezogen werden, ist es augenscheinlich, daß eben diese Normale mit jener, die in dem Plane MVC auf die Seite des Kegels VM in O perpendikulär steht, die nämliche seyn müße. W. das dritte zu erw. w.

8. III. Aufgabe. Es wird in dem Kegelschnitte SMſ, dessen Achsen schon bekannt sind, ein Punkt M gegeben; man verlangt einen andern IMG, dessen Bogen auf den gegebenen perpendikulär stehe. 7 Fig. I Taf.

Auflösung. Man ziehe in dem Kegelschnitte SMſ auf den gegebenen Punkt M eine Normale MN; wo diese in N die größere Achse Sſ schneidet, errichte man auf den Plan SMſ eine Perpendikulärlinie NI. Der Bogen IM des Kegelschnittes, der durch IN, MN geht, wird auf den Bogen ſMS in M perpendikulär seyn. Denn die Tangente in M des Bogens ſMS ist auf MN senkrecht, und der Plan INM auf den Plan ſMS; es sind auch die Tangente des Bogens IM, seine Normale in M, nämlich MP, wie auch NM in dem nämlichen Plane; folglich (7) ist die Tangente in M des Bogens ſMS auf den Plan INM senkrecht, mithin auch auf die Tangente des Bogens IMG in M, und die Bögen selbst sind einer auf den andern perpendikulär. W. zu erw. w.

9. Anmerkung. Wenn die Punkte ſ, M, S gegeben sind, findet man aus dem Kegelschnitte ſMS den Theil SN der größeren Achse; in dem Dreyecke ſVS, den Winkel VſS. Dann hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke ſNI die Winkel, und ſN, mithin sucht man ſI, welches von ſV abgezogen IV giebt. Man hat auch RIV, das Supplement des ſIN, den Winkel IVR, und die Seite IV, aus welchem man in dem Dreyecke IRV die Seite VR findet, oder den Punkt R, im welchen die Achse des Kegels von dem Plane IMG durchschnitten wird. Aus den Punkten I, R, M findet man endlich die Gattung und Achsen des Kegelschnittes IMG nach der II. Aufgabe.

8 Fig. I Taf. 10. IV. Aufgabe. Aus einem in der Oberfläche gegebenen Punkte S (8 Fig. I Taf.) auf einen gleichfalls gegebenen Kegelschnitt einen Perpendikulärbogen zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe durch S die Seite des Kegels VSD, und den Halbmesser der Grundfläche DC. Aus S lasse man auf DC einen Perpendikel SP fallen; durch P ziehe man die Senne XPY mit dem Durchmesser

ser

ser ACB (der in dem nämlichen Plane AVB mit der längeren Achse EF liegt) parallel. Gleichfalls ziehe man FK auf AB perpendikulär; PQ, KL mache man auf AB perpendikulär, und einander gleich. Auf der Grundfläche des Kegels errichte man einen andern Perpendikel LI mit FK gleich, und ziehe IH in der Fläche des Kegelschnittes mit FE parallel. Es ist klar, daß SP, PL, LI, IH in einem Plane liegen, und wenn man aus S auf HI einen Perpendikel SRT zieht, muß er HI in R schneiden. Man ziehe durch R auf den Kegelschnitt EMF eine Normallinie NRM, und schneide den Kegel durch den Plan SMGT, so werden die Tangenten beyder Kegelschnitte sich in M unter einem rechten Winkel schneiden, folglich auch die Bögen aufeinander perpendikulär seyn. Alles bezieht sich auf den Satz (7), und ist keines anderen Beweises nöthig. W. zu f. w.

11. Anmerkung. Aus dem Satze (7) ist klar, daß wenn der Punkt N (7 Fig. I Taf.), allwo die Normale des gegebenen Kegelschnittes die größere Achse schneidet, nicht zugleich in der Achse des Kegels liegt, die Normale des Kegelschnittes IMG mit der Linie MR eintreffen müße, welche auf die Seite VMH in M perpendikulär steht, und der gemeinschaftliche Durchschnitt der Plane IMG, VCH ist. Sofern aber die Normale MN auf VH senkrecht steht, und N ein Punkt der Achse VC ist, ist es unmöglich, daß die Normale MP des Kegelschnittes IMG nicht mit MN eintreffe. Denn man setze, es sey MP die Normale in M des Kegelschnittes IMG, welche nothwendig in dem Plane liegt, im welchen NM ist, da IMG durch NM geht. Der Berührungsplan ist auf NM perpendikulär, folglich auch die Tangente in M des Kegelschnittes IMG, die in dem Berührungsplane liegt; eben diese Tangente ist aber auch auf ihre Normale MP perpendikulär, die mit NM in einem

7 Fig. I Taf.

Plane liegt, folglich ist sie auf zwey Linien, die mit ihr in einem Plane IMG sind, perpendikulär, und zwar in dem nämlichen Punkte M, welches unmöglich ist.

12. V. Aufgabe. Es werden in der Oberfläche eines rechten gleichfalls gegebenen Kegels zwey Punkte
47 Fig. V Taf. N, M (47 Fig. V Taf.) gegeben; man verlangt den kürzesten Bogen eines Kegelschnittes, der aus M auf N kann gezogen werden.

Auflösung. Aus den Punkten M, N lasse man auf die Grundfläche des Kegels die Perpendikel MD, NF fallen; ziehe durch D, F die Halbmesser CA, CB; wie auch FD, und den Durchmesser XCY mit FD parallel. MP sey mit DF parellel, so steht MP oder DF : PN (= NF — MD) = 1 : *tang*. NMP. Da aber die Punkte M, N gegeben sind, weis man CF, CD, und den Winkel FCD, folglich findet man in dem Dreyecke FCD die Seite FD, und man bekömmt den Winkel NMP, mit welchem man bey C den Winkel *n*CX in dem Plane XVY gleich macht. Man errichte in C auf *n*C einen Perpendikel C*f* in dem nämlichen Plane, ziehe den Halbmesser C*l* auf XY perpendikulär, so wird dieser, als der auf dem Plan XVY senkrecht steht, auch auf C*f* perpendikulär seyn. Man ziehe CG auf VY perpendikulär, und beschreibe aus V auf der Oberfläche des Kegels einen Cirkel G*og*; den Kegel schneide man durch einen Plan, der durch *f*C*l* geht; auf *o*, allwo dieser Schnitt durch den Cirkel G*og* geht, ziehe man C*o*, und schneide den Kegel noch einmal durch den Plan *n*C*o*.

Es ist klar, daß *n*C auf den Plan *fol* perpendikulär sey, mithin ist *n*C*o* ein rechter Winkel. Da aber GY mit E*o* gleich, ist auch C*o* auf VE in *o* perpendikulär, und mithin auf den Berührungsplan des Kegels in *o*. Aus diesem aber ersieht man schon, daß nach der An-

merkung

merkung über die vorige Aufgabe (11) *Co* die gemeinschaftliche Normale so wohl des Kegelschnittes *nom* und der Seite des Kegels V*o*E, als auch des Kegelschnittes *sol* seyn müße. Wenn man nun den Kegel durch die Senne NM mit einem Plane NOM*c* schneidet, der mit *nom*C parallel ist, wird NOM der gesuchte kürzeste Bogen seyn. Denn man mache auch den Schnitt S*c*O mit *s*C*o* parallel, so ist es einleuchtend, daß die Kegelschnitte *nom*, NOM; wie auch *s*C*o*, S*c*O ähnlich sind; und da NM mit *n*C; *c*O mit C*o* parallel, muß auch *c*O auf NM in *r* perpendikulär seyn, wie auch in O auf VOE, und der Plan NOM auf den Plan S*c*O; aus welchem erhellet, daß *c*O die gemeinschaftliche Normale der Kegelschnitte NOM, SO, und der Seite des Kegels VOE sey. Dieses vorausgesetzt ist leicht zu erweisen, daß NOM der kürzeste Bogen zwischen N und M sey.

In der 48 Figur (V Taf.) stelle NOM den Bogen zwischen N, und M der Ellipse der vorigen Figur, KOL einen Theil des Kegelschnittes SO*c*, und O*ω* einen Theil der gemeinschaftlichen Normale vor. Ich sage, NO sey kleiner, als jedweder andere Bogen NG, der nicht durch O geht; und was von NO gesagt wird, ist auch von MO zu verstehen. Man stelle sich vor, N*ω* werde in unendlich viele, und untereinander gleiche verschwindende Theile N*p*, *pq*, *qr*, *rs* ꝛc. geschnitten; man ziehe mit O*ω* die Parallelen *np*, *mq*, *vr*, *μs* ꝛc. wie auch die *nt*, *mu*, *vx* ꝛc. mit N*ω* parallel. Man setze N*ω* = *y*, O*ω* = *x*. Es ist erlaubt, dem Bogen NOM mit NM, O*ω* parallele Achsen der Coordinaten zu geben, wie auch N*p*, *pq* ꝛc. = *dy* als unveränderlich anzunehmen, da unterdessen die *pn*, *tm*, *uv*, *xμ* ꝛc. = *dx* beständig bis in O abwachsen, allwo die Tangente des Bogens MON mit N*ω* parallel wird, wie bekannt ist. Nun werden alle verschwindende Bögen N*n*, *nm*, *mv*, *vμ* ꝛc. 48 Fig. V Taf.

durch $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, $\sqrt{d'x^2 + dy^2}$, $\sqrt{d''x^2 + dy^2}$ rc. ausgedrückt, und die Summe von allen wird der Bogen NO seyn. Es ist aber einleuchtend, daß diese Summe dazumal die kleinste ist, wann die Summe von allen dx, $d'x$, $d''x$ rc. ein Kleinstes ist, indem y für alle Bögen NO, NG rc., die durch NM gehen können, die nämliche Größe verbleibt; die Summe dx, dx', dx'' rc. ist nun die kleinste, da $x = O\omega$ ein Theil der Normale des Bogens KOL ist, wie es bekannt ist; es ist also NO kleiner, als ein jeder anderer Bogen NG. W. zuf. u. zu erw. w.

47 Fig. V Taf. 13. Zusatz. Wenn NM mit XY (47 Figur V Taf.) parallel wird, werden CF, CD gleich, und man darf nur cO durch den Mittelpunkt der Senne r auf die Seite des Kegels VOE in O perpendikulär machen, so hat man den kürzesten Bogen von M durch O zu N. Wären die Punkte N, M auf der nämlichen Seite des Kegels VOE, so fielen F und D auf den nämlichen Halbmesser der Grundfläche, Or verschwände, SO würde eine Tangente des Kegels in O mit XY parallel, und der Theil NM selbst dieser Seite wäre der kürzeste Weg. Im ersten Falle würde O der Scheitelpunkt, und Orc ein Theil der längeren Achse der Ellipse MON; SO aber würde sich in die Seite VOE des Kegels verwandeln.

Um aber alles in die Berechnung zu bringen, beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser Ce in dem Plane XVY den Quadranten eba, der in b durch die Achse des Kegels geht; und auf dem Plane nom einen andern edo; wie auch auf dem Plane solC den Bogen ao. Aus b ziehe man die Bögen bo; bd auf edo in d perpendikulär. Aus C nach v, allwo der Kegelschnitt nom durch die Seite VNB geht, ziehe man Cv, und beschreibe

den

den Bogen *bi* durch *Cv*. In dem sphärischen Dreyecke *bao* hat man den rechten Winkel bey *a*, die Seite $ba =$ $VCſ = 90° - VCn$, die Seite $bo = VCo = VCG$ $= 90° - CVY$, und findet $ao = aeo$. In dem Dreyecke *ebd* hat man gleichfalls den rechten Winkel *d*, den Winkel *e*, und die Seite $eb = nCV$, aus welchen man *bd* sucht, oder den Winkel, unter welchem die längere Achse des Kegelschnittes NOM die Achse des Kegels schneidet. Der Winkel *ebd* giebt auch den Bogen XBL, um die Seite des Kegels zu bestimmen, die durch den Scheitelpunkt H der gesuchten Ellipse geht. Endlich hat man in dem Dreyecke *ebi* den Winkel *e*, und $ebi =$ $XCB = CFD$, und die Seite *eb*; man findet also $bi =$ vCV. In dem geradlinichten Dreyecke *vCV* hat man die Winkel *vCV*, *vVC*, und CV; daraus findet man *Vv*; und da *cN* mit *Cv* parallel ist, steht $Vv : VC =$ $VN : Vc$. Die Punkte N, M, *c* wären schon genug die Achsen der Ellipse NOM zu bestimmen. (II. Aufg. 3.)

14. **Anmerkung.** Wenn man die Auflösungen der dritten und vierten Aufgabe gegen einander hält, kann es das Ansehen haben, als verfiele man hierinnen auf etwas Widersinniges. Denn sofern SMG (8 Fig. I Taf.) 8 Fig. I Taf. durch die Normale MRN des Kegelschnittes EMF geht, auch SR auf eben den Plan senkrecht steht, ist der Bogen SM auf EMF in M perpendikulär, und es ist nicht möglich, daß nicht auch EHM gegenseitig auf SMG perpendikulär sey; sollte nun der Kegelschnitt SMG gegeben, und verlangt werden, daß man auf denselben aus dem gegebenen Punkte H einen Perpendikulärbogen beschreibe, so würde ja der Bogen HM der Aufgabe genug thun? Dennoch wird vorgeschrieben, daß man aus dem gegebenen Punkte H auf den Plan SMG einen Perpendikel Hr fallen lasse; durch r eine Normale *prm*

auf

auf den Kegelschnitt SMG ziehe, und einen Plan durch Hrm gehen lasse, welcher den Kegelschnitt Hm gestalte.

Es ist außer Zweifel, daß wenn die Frage allein von den Perpendikulärbögen ist, EHM der Aufgabe: aus H auf SMG einen Perpendikulärbogen zu ziehen, genug thue; doch müßte die Auflösung folgendermaßen beschaffen seyn, daß man einen Kegelschnitt, der durch H geht, fände, dessen Normale MN in dem gegebenen Plane SMG liegt; und obschon durch dieses zugleich die Perpendikulärlage erhalten wird, so sind doch die Bedingnisse, die zur Auflösung gegeben werden, weit anderst, als wenn man begehrt, aus H auf SMG einen Perpendikulärbogen zu ziehen. Nur dieses folgt daraus, daß aus dem Punkte H auf SMG zwey Bögen können gezogen werden, der eine Hm, dessen Plan durch die Normale in m des Kegelschnittes SMG geht; der andere HM, dessen Normale MN in dem gegebenen Plane SMG liegt, welches nichts Widersinniges enthält, obschon beyde auf SMG perpendikulär sind.

Die Entwickelung dieses anscheinenden Widerspruches entdeckt uns einen wesentlichen Unterschied der Bögen HM, Hm. Der letztere, dessen Plan nicht nur auf den Plan SMG senkrecht steht, sondern auch durch die Normale *mrp* des Kegelschnittes SMG geht, ist nicht nur auf SMG perpendikulär, sondern auch der kürzeste aus allen Bögen, die aus H auf den Umkreis des Kegelschnittes SMG können gezogen werden; HM entgegen, ob er schon perpendikulär ist, hat diese Eigenschaft nicht; sondern SM ist der kürzeste aus allen, die aus S auf den Umkreis HMF können beschrieben werden. Der Beweis erhellet aus dem, was N. 12 gesagt worden. Denn da Hr für alle Bögen, die aus H auf den Umkreis SMG gezogen werden, gemein ist, hat man nur auf *rm* zu sehen; und da *rm*, ein Theil der Normale *mp*, kleiner

ist,

ist, denn rM, muß auch Hm kleiner seyn, als HM. Eben also ist SR für alle Bögen, die aus S auf EMF gezogen werden, gemein, RM aber ein Kleinstes, folglich ist SM der kleinste Bogen, der aus S auf den Umkreis EMF kann beschrieben werden. Aus diesem aber ersieht man, daß wir durch die IV. Aufgabe zugleich die folgende aufgelöset haben: **Aus einem in der Oberfläche des Kegels gegebenen Punkte S auf den Umkreis des gegebenen Kegelschnittes EMF den kürzesten Bogen zu beschreiben.**

Ich muß hier einen Lehnsatz einrücken, der die folgenden Aufgaben sehr erleichtert.

15. **Lehnsatz.** Wenn man in einem rechten Kegel ELD (9 Fig. II Taf.) LS = LK, SO = OK nimmt, und durch O die Linie VOX mit der Seite ELB parallel zieht, und den Kegel durch einen Plan S$\int$, Sσ, der allemal durch S geht, schneidet, wird der Abstand der Brennpunkte f, F, oder φ, Φ des Kegelschnittes allezeit mit K$\int$, oder Kσ gleich seyn. 9 Fig. II Taf.

Beweis. Indem VX mit EL parallel ist, steht SO : OK = SC : C$\int$, und geht also XV durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte. Man beschreibe mit dem Halbmesser C$\int$ einen Cirkel, und verlängere OK bis an denselben in M, so werden $\int$MO, MOo, $\int o$O rechte Winkel seyn, folglich auch M$\int o$, und MO = $\int o$. Es ist also die Hälfte der kleineren Achse (5) = $\sqrt{(MO \times OS)}$. Man ziehe durch O und C einen Durchmesser dCD, und auf selben in O eine Perpendikulärlinie NO, so wird MO × OS = dO × OD = NO², und NO ist die Hälfte der kleineren Achse, mithin OC = $\sqrt{NC^2 - NO^2}$ = $\sqrt{CS^2 - NO^2}$ der Abstand der Brennpunkte von dem Mittelpunkte C. Da nun SO : SK = OC : K$\int$, wird K$\int$ = 2OC, der Abstand der Brennpunkte, und wenn

man

man mit dem Halbmesser CO aus C einen Cirkel beschreibt, werden die Punkte f, F bestimmt.

Eben also verhält es sich mit der Hyperbel. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte $\varkappa$ um den Durchmesser $S\sigma$ einen Cirkel, mache $S\mu$ mit $OL\tau$ parallel, ziehe aus μ durch σ eine Linie $\mu\omega$, so werden wieder die Winkel $OS\mu$, ωOS, $S\mu\omega$ rechte seyn, folglich auch $\mu\omega O$, und $\mu\omega = OS$. Die Hälfte der Mitachse wird demnach $\sqrt{(\omega\sigma \times \omega\mu)} = \sqrt{(\omega r \times \omega R)}$, oder sofern man mit dem Halbmesser $\varkappa\omega$ noch einen Cirkel beschreibt, $= \sqrt{(\omega r \times rP)}$, und ωP muß der Abstand der Brennpunkte seyn. Nun aber muß dieser leztere Cirkel auch durch O gehen, indem ωOS ein rechter Winkel ist, und wird $O\varkappa = \omega\varkappa$. Ueber dieses ist $SO : SK = O\varkappa : K\sigma$, folglich $O\varkappa = \frac{1}{2}K\sigma$. W. zu erw. w.

16. Anmerkung. Wenn der Plan durch Su geht, und mit EL parallel wird, bekömmt man eine Parabel. Man ziehe Sn auf EL senkrecht. Die ähnlichen Dreyecke LOK, SnK geben $KL : KO = KS : Kn$, und Kn ist die Hälfte des Parameters der Parabel (Geom. P. III. N. 200). Es steht aber $Kn : Om = KS : OS$, und Om wird der vierte Theil des Parameters, folglich der Abstand des Brennpunktes von dem Scheitelpunkte S, und der Brennpunkt wird durch einen Perpendikel bestimmt, der aus O auf Su fällt.

17. VI. Aufgabe. Es wird ein Kegelschnitt gegeben, man verlangt einen rechten Kegel, durch dessen Schnitt er gestaltet wird.

10 Fig. I Taf. Auflösung. Sf (10 Fig. I Taf.) sey die Hauptachse; fF der Abstand der Brennpunkte. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte f mit dem Halbmesser fF einen Cirkelbogen kKl, und ziehe auf einen beliebigen Punkt desselben eine Linie SK. Diese theile man in O gleich ab, und errichte in O einen Perpendikel OL; ziehe durch

K

K die Linie *f*KL, bis sie den Perpendikel in L schneidet; verbinde endlich S mit L, so hat man den verlangten Kegel, wie aus dem Lehnsatze klar ist (15).

Wenn man den Punkt *k* nähme, im welchen der Bogen *k*K*l* den Cirkel schneidet, der auf dem Durchmesser *f*S kann beschrieben werden, bekäme man anstatt des Kegels einen Cylinder, dessen Durchschnitt die nämliche Ellipse giebt.

Wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, deren Querachse Sσ, und die Entfernung der Brennpunkte $\Phi\varphi$, wird aus dem Mittelpunkte σ ein Cirkelbogen *d*KD mit dem Halbmesser $\Phi\varphi$ beschrieben, und SK, wie zuvor, in O gleich abgetheilet; dann wird der Perpendikel OL von der Linie Kσ, in L durchschnitten, und man hat zwey entgegengesetzte Kegel KLS, ALH, welche, wenn sie durch Sσ geschnitten werden, die Hyperbel geben.

Ist endlich der Kegelschnitt eine Parabel (11 Fig. I Taf.), deren Achse S*u*, der Brennpunkt F, errichte man in S auf S*u* einen Perpendikel SD, dessen Länge willkührlich ist; durch D ziehe man die Linie DL mit S*u* parallel; nehme DK = 2SF, verbinde S mit K, theile SK in O gleich *ab*, und errichte den Perpendikel OL, welcher KD in L schneidet; ziehe man endlich SL, so giebt der Kegel KLS die verlangte Parabel, wenn er mit einem Plane durch S*u* geschnitten wird. W. zuf. w. 11 Fig. I Taf.

18. Anmerkung. Die Aufgabe wird bestimmt, wenn auch der Kegel gegeben wird, wie wir sehen werden. Allein man kann auch verschiedene Conoiden finden, die die gegebenen Kegelschnitte geben. Wir wollen in folgender Aufgabe nur ein Beyspiel von der Ellipse geben.

19. VII. Aufgabe. Eine Conoide zu finden, deren Durchschnitt die gegebene Ellipse gestaltet.

Auflösung. I eine Elliptoide. CS (12 Fig. I Taf.) sey die Hälfte der größeren, CB die Hälfte der kleineren 12 Fig. I Taf.

Achse

Achse der gegebenen Ellipse. Man behalte die größere, und nehme CP<CB für die kleinere Achse, und beschreibe damit eine Ellipse SDP. Wenn man diese um ihre kleinere Achse herumdrehet, wird sie eine Elliptoide gestalten. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser CB einen Cirkelbogen BDE, der irgendwo in D die Ellipse SDP schneiden muß. Schneidet man die Elliptoide durch einen Plan, der durch den Mittelpunkt C, und einen Punkt des Parallels geht, den D bey der Umdrehung um CP beschreibt, so wird der Durchschnitt eine Ellipse gestalten, deren größere Achse der Durchmesser des Aequators 2CS, und die kleinere 2CB, oder 2CD seyn wird.

Man kann auch die kleinere Achse 2CB der gegebenen Ellipse beybehalten, und anstatt der größeren eine etwas längere, als zum Beyspiele 2CR, nehmen. Wenn man mit diesen eine Ellipse RAB beschreibt, und sie um die längere Achse herumdrehet, hat man eine verlängerte Elliptoide. Aus C beschreibe man mit dem Halbmesser CS einen Cirkelbogen SA, und schneide die Elliptoide also, daß der Plan durch C, und einen Punkt A des Parallels gehe, der bey der Umdrehung von A beschrieben wird, so hat man eine Ellipse, deren kleinere Achse 2CB, und die größere 2CA, oder 2CS ist.

13 Fig. II Taf. II. eine Paraboloide. Sſ sey die größere Achse (13 Fig. II Taf.), CG die Hälfte der kleineren der gegebenen Ellipse. Man stelle sich vor, ſODS sey die Parabel, durch deren Umdrehung um die Achse DP die gesuchte Paraboloide gestaltet wird: AMG sey derselben Durchschnitt, der durch CG geht, mithin eine Parabel, deren Ordinate CG mit der Hälfte der kleineren Achse der Ellipse gleich ist; es wird aber hier die Abscisse AC nach Belieben angenommen, und man nenne sie $=c$, die Hälfte der kleineren Achse der Ellipse $=b$, die Hälfte

der

der größeren $= a = C\int = CS$, so hat man für die Parabel AMG eine Gleichung $b^2 = cp$, in welcher p der Parameter für die Achse AC ist, folglich bekannt, und $= \frac{b^2}{c}$. Da aber $\int C = CS$, ist auch in der Parabel $\int$ADS, CS eine Ordinate, und AC eine Absciſſe des Durchmeſſers AC; und wenn man den Parameter eben dieses Durchmeſſers $= \pi$ nennet, so hat man $\pi c = a^2$, folglich $b^2 : a^2 = cp : c\pi = p : \pi$, und es wird $\pi = \frac{a^2 p}{b^2}$. Man beschreibe aus A mit dem Halbmeſſer $AL = \frac{a^2 p}{4b^2}$ einen Halbcirkel LFK, und ziehe auf CAL eine Perpendikulärlinie BLH, wie auch P$\int$ mit BH, und $\int$H mit CL parallel. Aus $\int$ beschreibe man mit dem Halbmeſſer $\int$H einen Cirkelbogen HF, der in F den Halbcirkel LFK schneide. Durch F ziehe man PFB mit CL parallel, theile FB in D gleich ab, so hat man in F den Brennpunkt, in D den Scheitelpunkt, und die Richtungslinie HB der Parabel $\int$AD, durch deren Umdrehung um DP die gesuchte Paraboloide entsteht. Daß diese durch $\int$, S gehe, ist aus der Gleichung $cp = a^2$ klar; daß aber auch G in der Paraboloide ist, erhellet daraus, daß (wenn OCV mit HB parallel gezogen wird) $OC \times CV = CG^2$.

III. eine Hyperboloide. In der 14ten Figur (II Taf.) sey $\int$LS eben der Kegel, den wir in der 10ten betrachtet haben; die größere Achse $\int$S, die kleinere $\sqrt{(HS \times \int G)}$. Durch den Mittelpunkt c ziehe man LC, und mache SA mit LC parallel. Die Größe der Linie SA ist willführlich. Man beschreibe zwischen den Asymptoten EL, KL eine Hyperbel, die durch A geht, und deren Scheitel man ohne Beschwerde findet, wenn man 14 Fig. II Taf.

zwischen Ah und Ag die mittlere Proportionallinie sucht, und dieselbe auf die Achse des Kegels in IM anbringet. Die Umdrehung um LO des Dreyeckes ELK und der Hyperbel gestaltet einen Kegel, und eine Hyperboloide BIAF. Man weiß aus der Lehre von den Kegelschnitten (Geom. P. III. N. 222), daß wenn man den Kegel und die Hyperboloide zugleich durch DABE schneidet, die Ellipsen DE, AB ähnlich sind; ist nun DE mit Ss parallel, so ist auch die Ellipse, welche die Hyperboloide giebt, jener des Kegels Ss gleich, indem cS = CA = CB = cs. W. zuf. w.

20. VIII. Aufgabe. Den Durchschnitt eines gegebenen rechten Kegels zu finden, der den gleichfalls gegebenen Kegelschnitt giebt.

Auflösung. I. wenn eine Ellipse gegeben wird.
10 Fig. 1 Taf. Ss (10 Fig. I Taf.) sey die größere Achse, und fF der Abstand der Brennpunkte; das Verhältniß des Halbmessers der Grundfläche des Kegels zu seiner Achse, $r : c$; S$s = a$, die kleinere Achse der Ellipse $= b$, OL $= x$, so wird fF $= \sqrt{a^2 - b^2}$. Man stelle sich vor, die Aufgabe sey aufgelöset, und beschreibe auf den Durchmesser Ss einen Halbcirkel; verlängere SK (die in O auf die Achse des Kegels LO perpendikulär ist) bis in M; dann hat man die ähnlichen Dreyecke KLO, KsM. Man weiß aus dem Lehnsatze (15), daß K$s = \sqrt{a^2 - b^2}$, und man hat KL : LO $= \sqrt{c^2 + r^2} : c =$ Ks $(\sqrt{a^2 - b^2}) : s\mathrm{M} = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 + r^2}}$. Item KL : KO $= \sqrt{c^2 + r^2} : r = s$K $(\sqrt{a^2 - b^2}) :$ KM $=$ $\frac{r\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 + r^2}}$. Es ist auch $s\mathrm{S}^2 - s\mathrm{M}^2 = \mathrm{MS}^2$, oder

$a^2 -$

$a^2 - \frac{a^2c^2 - b^2c^2}{c^2 + r^2} = \frac{a^2r^2 + b^2c^2}{c^2 + r^2}$, folglich MS $=$

$\frac{\sqrt{a^2r^2 + b^2c^2}}{\sqrt{c^2 + r^2}}$, und KS $= \frac{\sqrt{a^2r^2 + b^2c^2} - r\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 + r^2}}$.

Wir haben demnach KO : OL $= r : c =$ KO

($\frac{1}{2}$KS) $: x = \frac{\sqrt{a^2r^2 + b^2c^2} - r\sqrt{a^2 - b^2}}{2\sqrt{c^2 + r^2}} : x$

$= \frac{c\sqrt{a^2r^2 + b^2c^2} - cr\sqrt{a^2 - b^2}}{2r\sqrt{c^2 + r^2}}$.

Aus LO findet man OS und LS, wie auch Lf $=$ LS $+ f$F, und die Punkte S, f in der Oberfläche des Kegels, durch welche der Schnitt gehen muß, sind bekannt.

II. Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel ist. Die Querachse Sσ sey $= a$, die Entfernung der Brennpunkte $\Phi\varphi = \sqrt{a^2 + b^2}$, wenn nämlich die Mitachse $= b$, OL $= x$. Man lasse aus σ auf KS einen Perpendikel $\sigma\mu$ fallen, so sind die Dreyecke KLO, K$\sigma\mu$ ähnlich, und man hat KL : LO $=$

$\sqrt{c^2 + r^2} : c =$ KS $(\sqrt{a^2 + b^2}) : \sigma\mu = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + r^2}}$.

Item KL : KO $= \sqrt{c^2 + r^2} : r =$ Kσ $(\sqrt{a^2 + b^2})$:

Kμ $= \frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + r^2}}$. Man hat auch S$\sigma^2 = \sigma\mu^2 +$

Sμ^2, oder S$\sigma^2 - \sigma\mu^2 =$ Sμ^2, das ist $a^2 - \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{c^2 + r^2}$

$= a^2r^2$

$= \frac{a^2r^2 - b^2c^2}{c^2 + r^2}$, $S\mu = \frac{\sqrt{a^2r^2 - b^2c^2}}{\sqrt{c^2+r^2}}$; SK $=$ $\frac{r\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2r^2 - b^2c^2}}{\sqrt{c^2+r^2}}$; mithin steht wieder KO :

$$OL = r : c = KO\left(\tfrac{1}{2}KS = \frac{r\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2r^2 - b^2c^2}}{2\sqrt{c^2+r^2}}\right)$$

$$: x = \frac{cr\sqrt{a^2+b^2} - c\sqrt{a^2r^2 - b^2c^2}}{2r\sqrt{c^2+r^2}}.$$

11 Fig. I Taf. III. Wenn eine Parabel gegeben ist. Su (11 Fig. I Taf.) stelle die Hauptachse, SF den Abstand des Brennpunktes F von S vor; SD sey auf KL senkrecht, und $2SF = \frac{1}{2}p$, so steht KO : KL $= r : \sqrt{c^2+r^2}$ $= KD(\frac{1}{2}p) : KS = \frac{p\sqrt{c^2+r^2}}{2r}$; wie auch KO : OL $=$ $r : c = \frac{1}{2}KS\left(\frac{p\sqrt{c^2+r^2}}{4r}\right) : OL(x) = \frac{cp\sqrt{c^2+r^2}}{4r^2}$. W. zuf. w.

21. IX Aufgabe. Es werden drey Perpendikulärhöhen AD, BE, CF (15 Fig. II Taf.) auf einem Plane DEF gegeben; man verlangt einen rechten Kegel, auf dessen Oberfläche sich die Punkte A, B, C befinden können.

15 Fig. II Taf.

Auflösung. Man ziehe auf AD, BE, CF in der gegebenen Fläche die Linien GD, HE, IF senkrecht, und miteinander parallel; dann AG nach Belieben, daß sie DG in G schneide, und BH, CI mit AG parallel, so hat man drey rechtwinklichte, und ähnliche Dreyecke.

Man

Man beschreibe ferner aus den Punkten *d*, *e*, *f* (16 Fig. II Taf.), welche den gegebenen D, E, F in der vorigen Figur entsprechen, mit den Halbmessern *dg* = DG, *eh* = EH, *fi* = FI drey Cirkel *mgn*, *ohp*, *qir*. Man theile *de* in *c* gleich ab, und übertrage aus *c* in *a* und *b* die Linie $\frac{1}{2}(dg - eh)$, und beschreibe aus *a* eine Hyperbel *akl*, deren Brennpunkte *d* und *e*, die Hauptachse aber *ab*, sind. Eben so übertrage man aus *x*, dem Mittelpunkte der Linie *ef*, die Linie $\frac{1}{2}(eh - fi)$ in α und β, und beschreibe eine Hyperbel αkλ, deren Brennpunkte *e* und *f* sind, die Querachse αβ. Allwo sich in *k* diese Hyperbeln schneiden, wird der Mittelpunkt eines Cirkels seyn, der die andern drey in *g*, *h* und *i* berührt. Denn wir haben (Geom. P. IV.) erwiesen, daß man aus einem jeden Punkte der Hyperbel *akl*, als aus dem Mittelpunkte, einen Cirkel beschreiben könne, der die zwey gegebenen *mgn*, *ohp* mit seiner hohlen Seite berühre. Eben so muß jeder Punkt der Hyperbel αkλ der Mittelpunkt eines Cirkels seyn, der auf der hohlen Seite die Cirkel *ohp*, *qir* berührt. Da nun der Punkt *k* beyden Hyperbeln gemein ist, muß der Cirkel *ghi*, allwo die Halbmesser *kg*, *kh*, *ki*, die durch die Mittelpunkte *d*, *e*, *f* der drey Cirkel gehen, an seinen Umkreis stossen, alle drey in *g*, *h*, und *i* berühren. Und dieser Cirkel wird die Grundfläche des gesuchten Kegels seyn. Denn es ist klar, daß ein jeder Perpendikel MD (1 Fig. I Taf.) der aus was immer für einem Punkte M der Seite AV auf die Grundfläche eines rechten Kegels fällt, ein mit ACV ähnliches Dreyeck gebe. Da wir nun die rechtwinklichten Dreyecke ADG, BEH, CFI (15, 16 Fig. II Taf.) ähnlich gemacht haben, steht immer DG : AD = HE : EB = FI : FC = *gk* zur Achse des Kegels, die in *k* auf die Cirkelfläche perpendikulär, und mit AD,

16 Fig. II Taf.

I Fig. I Taf.

15, 16 Fig. II Taf.

BE, CF parallel steht, welche demnach $= \frac{AD \times gk}{AG}$ seyn wird. W. zuf. w.

22. Anmerkung. Die Aufgabe ist unbestimmt,
15 Fig. II Taf. und wir haben (15 Fig. II Taf.) DG nach Belieben angenommen. Wenn man den Kegelschnitt selbst zu wissen begehrt, kann man sich der I. und II. Aufgabe bedienen. Allein wir wollen eben diese Aufgabe auf eine Elliptoide anwenden, und sie folgendermaßen vortragen.

23. X. Aufgabe. Es werden in dem Plane des
17 Fig. II Taf. Aequators drey Punkte (17 Fig. II Taf.) D, E, F gegeben, auf welche aus der Oberfläche einer Elliptoide eben so viele Perpendikel AD, BE, CF fallen; man sucht die Elliptoide, und die Ellipse, die durch A, B, C geht.

Auflösung. In einer Elliptoide sind alle Meridiane gleich, und wir wollen setzen, die Elliptoide werde durch die Umdrehung einer Ellipse um die kleinere Achse gestaltet. Ueber dies ist einleuchtend, daß kein Perpendikel größer, denn die Hälfte der kleineren Achse seyn könne. Dieses vorausgesetzt, ist es eben eines, ob wir die Perpendikel AD, BE, CF in drey verschiedenen Meridianen betrachten, welche wir so lang um die kleinere Achse herumdrehen können, bis sie alle drey in einen zusammentreffen, oder ob wir sie alle drey in einem einzigen, als zum Beyspiele in P*abc*S, uns vorstellen. Es sey demnach $ad = AD = a$, $be = BE = b$, $cf = CF = c$; Kd = $ar = x$; K$e = bq = z$; K$f = cp = v$; KS $= m$, KP $= n$, so wird $xx = \frac{m^2}{n^2}(n^2 - a^2)$, $z^2 = \frac{m^2}{n^2}(n^2 - b^2)$, $v^2 = \frac{m^2}{n^2}(n^2 - c^2)$. m und n sind bis daher willkührliche Größen; nur dieses muß vorausgesetzt werden, daß n größer sey, denn a, b, und c.

Man

Man beschreibe (18 Fig. II Taf.) aus dem Mittelpunkte K mit dem Halbmesser $K\delta = Kd$, $K\varepsilon = Ke$, $K\varphi = Kf$, $K\alpha = KS$ vier Cirkel, und übertrage aus der vorigen Figur DE in $\delta\varepsilon$ aus einem beliebigen Punkte δ; dann DF in $\delta\varphi$, jedoch auf eben die Seite, auf welche ε fällt, so hat man auf dem Plane des Aequators das Dreyeck $\delta\varphi\varepsilon = DFE$, dessen alle Seiten gegeben sind. In dem Dreyecke $\delta K\varphi$ hat man ebenfalls die 18 Fig. II Taf.

drey Seiten, $\delta\varphi = DF$, $K\delta = x = \frac{m}{n}\sqrt{n^2 - a^2}$,

$K\varphi = \nu = \frac{m}{n}\sqrt{n^2 - c^2}$, und sucht den Winkel

$\delta K\varphi = \alpha K\gamma$. Eben so findet man $\delta K\varepsilon = \alpha K\beta$, und man hat auch $\beta K\gamma$, das ist die Differenz der drey Meridiane, aus denen die Perpendikel gezogen werden. Indem aus dem Dreyecke $\delta K\varphi$ der Winkel $K\varphi\lambda$ bekannt wird, auch $\lambda K\varphi$, wie wir nur itzt gesagt haben, findet man auch $\varphi\lambda$, und $K\lambda$.

Itzt setzen wir, MPDN (19 Fig. II Taf.) sey die Elliptoide, die wir durch die Umdrehung der Ellipse KPS der 17 Figur bekommen; MNOD der Aequator, auf dem das Dreyeck $\varepsilon\delta\varphi$ der vorigen Figur aufgetragen ist, $A\delta = a$, $B\varepsilon = b$, $C\varphi = c$. Man ziehe die Senne AC, und errichte in L (welcher Punkt eben λ der vorigen Figur ist) einen Perpendikel LR, der die Senne AC in R schneidet. Aus B ziehe man durch R eine Linie, die irgendwo in V die Achse PK der Elliptoide schneiden muß, indem die Perpendikel $B\varepsilon$, RL, und die Achse PK in dem Plane des Meridians PBN sich befinden. Man setze, es werde aus C auf $A\delta$ eine Linie mit $\varphi\delta$ parallel gezogen, so hat man $\varphi\delta : A\delta - C\varphi = \varphi L : x$; den gefundenen Werth x gebe man zu $C\varphi$ hinzu, so hat man LR. Gleichfalls sey RH aus 19 Fig. II Taf.

R mit Kε parallel, und mit Lε gleich. Die Differenz zwischen Bε und RL giebt BH, und man hat BR $= \sqrt{(HR^2 + BH^2)} = \sqrt{[(K\varepsilon - KL)^2 + (B\varepsilon - RL)^2]}$. Endlich setze man εL : BR $=$ εK : BV. Man stelle sich vor, die Linien εK, BV werden so weit verlängert,
20 Fig. II Taf. wie in der 20 Figur (II Taf.) bis sie in μ zusammenstossen; so hat man BH : HR $=$ Bε : $\varepsilon\mu$, und $\varepsilon\mu$: $\varepsilon\mu - \varepsilon$K $=$ Bε : VK, und man weiß also den Punkt V der Achse, im welchen sie von dem Plane, der durch A, B, C geht, geschnitten wird. Die weitere Bestim-
19 Fig. II Taf. mung der Ellipse ABCG (19 Fig. II Taf.) übergehe ich hier, indem sie mit jener vollkommen ähnlich ist, die wir in der II. Aufgabe für einen rechten Kegel gegeben haben, nur daß sie einige sehr bekannte Eigenschaften der Elliptoide zum voraus setzet, die wir Geom. Part. III. erwiesen haben. W. zuf. w.

24. XI. Aufgabe. Es werden in einem Plane
21 Fig. II Taf. die Punkte A, D, B, C (21 Fig. II Taf.) sammt den Perpendikularhöhen EA, FD, GB gegeben, man sucht einen rechten Kegel, in dessen Oberfläche die Punkte E, F, G liegen, und den Punkt der Achse CH, (deren Länge unbestimmt ist), in den sie von dem Plane geschnitten wird, der durch E, F, G geht.

Auflösung. Indem AC, DC, BC, wie auch AD, DB, AB sammt den Höhen EA, FD, GB gegeben sind, suche man den Halbmesser der Grundfläche, und die Länge der Achse. Der Halbmesser sey $=$ R, die Achse $= x$, AE $= a$, AC $= b$, FD $= c$, CD $= d$, GB $= e$, SC $= f$, so wird stehen $x - a : b = x$: R $= \frac{bx}{x-a}$; und $x - c : d = x$: R $= \frac{dx}{x-c}$, mithin $\frac{bx}{x-a} =$

dc

$\frac{dc}{x-c}$, $bx - bc = dx - ad$, $x = \frac{bc - ad}{b - d}$. Nachdem x bekannt ist, findet man auch R; denn die vorige Analogie $x - a : b = x : R$ wird $\frac{bc - ad}{b - d} - a : b = \frac{bc - ad}{b - d} : R$, und $R = \frac{bc - ad}{c - a}$.

Aus einem beliebigen Punkte c (22 Fig. II Taf.) beschreibe man mit den Halbmessern $cd = d$, $cb = f$, 22 Fig. II Taf.
$ca = b$, $cr = \frac{bc - ad}{c - a}$ vier Cirkel, und ziehe einen Halbmesser car. Aus a, wo dieser den dritten Cirkel schneidet, mache man mit ad = AD der vorigen Figur in dem ersten bey d, und mit ab = AB bey b in dem zweyten einen Einschnitt, so hat man auf der Grundfläche eines rechten Kegels drey Punkte a, d, b, auf welche die Perpendikel aus den drey in der Oberfläche gegebenen Punkten E, F, G fallen, und nach der ersten Aufgabe kann man den Punkt finden, im welchen die Achse von dem Plane geschnitten wird, der durch E, F, G geht. W. zuf. w.

25. Anmerkung. Diese Aufgabe kann in der Perspektive eine Anwendung haben, wenn drey Punkte eines Planes, oder derer Perpendikularhöhen über den geometrischen Plan gegeben werden, und jener Punkt gesucht wird, im welchen die Perpendikularhöhe des leuchtenden Punktes von dem Plane geschnitten wird. Man kann auch den Punkt in dem Plane EFG finden, auf den der Perpendikel aus dem leuchtenden Punkte fällt, wenn man ferner den Winkel VKO (2 Fig. I Taf.) sucht, 2 Fig. I Taf.
wie ein jeder leicht einsieht.

26. XII. Aufgabe. In einer gegebenen Ellipse
23 Fig. II Taf. SBfG (23 Fig. II Taf.) ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Man setze $SC = a$, $BC = b$, $CH = FE = x$, $HE = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, so wird $BE = BD = \sqrt{[(CB + CF)^2 + FE^2]} = DE = 2CH$, das ist, $\sqrt{[(b + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})^2 + x^2]} = 2x$, oder

$$b^2 + \frac{2b^2}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + x^2 = 4x^2,$$

mithin $\frac{2b^2}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = 3x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2b^2 = \frac{3a^2x^2 + b^2x^2 - 2a^2b^2}{a^2}$, und $4b^4 - \frac{4b^4x^2}{a^2} = \frac{(3a^2 + b^2)^2x^4 - 4a^2b^2(3a^2 + b^2)x^2 + 4a^4b^4}{a^4}$;

$$(3a^2 + b^2)^2x^4 + (4a^2b^4 - 12a^4b^2 - 4a^2b^4)x^2 = 0$$
$$(3a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^4 - 12a^4b^2 - 4a^2b^4 = 0$$
$$x^2(3a^2 + b^2)^2 = 12a^4b^2$$
$$x^2 = \frac{12a^4b^2}{(3a^2 + b^2)^2}, \text{ und } x = \pm \frac{2a^2b\sqrt{3}}{3a^2 + b^2}.$$

Man kann auch ein anders gleichseitiges Dreyeck bestimmen, nämlich $S\varepsilon\delta$, wenn man setzet $S\alpha = SC + C\alpha = a + x$, $\varepsilon\delta = 2\varepsilon\alpha = 2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, und $S\varepsilon^2 =$

$$a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = 4b^2 - \frac{4b^2x^2}{a^2};$$

$$a^2 + 2ax = 3b^2 - \frac{3b^2x^2}{a^2} - x^2 = 3b^2 - \frac{(3b^2 + a^2)x^2}{a^2},$$

$(3b^2$

$$\frac{(3b^2+a^2)}{a^2}x^2 + 2ax = 3b^2 - a^2$$

$$x^2 + \frac{2a^3x}{3b^2+a^2} + \frac{a^6}{(3b^2+a^2)^2} = \frac{3a^2b^2-a^4}{3b^2+a^2} + \frac{a^6}{(3b^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{9a^2b^4 - 3a^4b^2 + 3a^4b^2 - a^6 + a^6}{(3b^2+a^2)^2} = \frac{9a^2b^4}{(3b^2+a^2)^2}$$

$$x = \pm \frac{3ab^2 - a^3}{3b^2+a^2} = \pm \frac{a(3b^2 \mp a^2)}{3b^2+a^2}.$$

Nach der ersten Auflösung hat x allemal zwey gleiche Werthe, den einen in CS, den andern in Cs; aber nach der zweyten, wenn man bey dem Radical das Zeichen + nimmt, wird $x = C\alpha$ entweder $= o$, sofern $a^2 = 3b^2$; oder positiv, wenn $3b^2 > a^2$, wie in dieser Figur; endlich auch wird x negativ, da $a^2 > 3b^2$, und $C\alpha$ gegen S liegt. Man kann niemals $x = -\frac{a(3b^2+a^2)}{3b^2+a^2}$ nehmen, indem $x = -a$ werden würde. W. zuf. w.

27. XIII. Aufgabe. Ein regelmäßiges Viereck in einer gegebenen Ellipse zu beschreiben.

Auflösung. Es ist einleuchtend, daß wenn MP (24 Fig. III Taf.) = PC = CQ = QN genommen wird, MNOL ein regelmäßiges Viereck seyn werde. Man 24 Fig. III Taf. setze also $x = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, und $x^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, folglich $\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2} = b^2$, $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

W. zuf. w.

28. XIV. Aufgabe. Ein geschobenes Viereck, und ein gleichseitiges Achteck in einer gegebenen Ellipse zu beschreiben.

Auflö-

25 Fig. III Taf. Auflösung. Wenn man (25 Fig. III Taf.) die Linien SB, Bſ, ſG, GS zieht, wird jede $= \sqrt{a^2+b^2}$, und man hat also ein geschobenes Viereck. Man errichte auf den Mittelpunkt jeder dieser Linien I, K, R, V senkrechte Linien IM, KN, RO, VL, die alle untereinander gleich sind, wegen der Gleichheit der Bögen, folglich sind auch SM, MB, BN, Nſ ꝛc. gleich, wie es klar ist, und man hat also ein gleichseitiges Achteck. W. zuf. w.

29. Um den algebraischen Ausdruck der Seiten SM, MB zu finden, sey CS $= a$, CB $= b$, PC $= x$, PM $= y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, und es wird $\sqrt{SP^2+PM^2} = \sqrt{[MQ^2+(BC-MP)^2]}$, das ist $\sqrt{\left((a-x)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\left(x^2 + \left(b - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right)}$, oder

$$a^2 - 2ax + xx + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = x^2 + b^2 - \frac{2b^2\sqrt{a^2-x^2}}{a} + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2};\ a^2 - 2ax = b^2 - \frac{2b^2\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$\frac{a^3}{2b^2} - \frac{a^2x}{b^2} - \frac{a}{2} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\frac{a^6}{4b^4} - \frac{a^5x}{b^4} + \frac{a^4x^2}{b^4} - \frac{a^4}{2b^2} + \frac{a^3x}{b^2} + \frac{a^2}{4} = a^2 - x^2;$$

$$\frac{a^6}{4b^4} + \frac{(4a^4+4b^4)x^2}{4b^4} - \frac{(4a^5-4a^3b^2)x}{4b^4} - \frac{3a^2b^4}{4b^4} = 0,$$

$$4(a^4+b^4)x^2 - (4a^5-4a^3b^2)x + a^2(a^4-3b^4) = 0,$$

$$x^2 - \frac{a^3(a^2-b^2)x}{a^4+b^4} = \frac{-a^2(a^4-3b^4)}{4(a^4+b^4)} = \frac{-a^6+3a^2b^2}{4(a^4+b^4)},$$

x^2

$$x^2 - \frac{a^3(a^2-b^2)x}{a^4+b^4} + \frac{a^6(a^2-b^2)^2}{4(a^4+b^4)^2} = -\frac{a^6-3a^2b^4}{4(a^4+b^4)} + \frac{a^6(a^2-b^2)^2}{4(a^4+b^4)^2} = \frac{a^2b^2(3a^4b^2+3b^6-2a^6)}{4(a^4+b^4)^2},\ x = \frac{a^3(a^2-b^2)}{2(a^4+b^4)} \pm \frac{ab\sqrt{3b^2(a^4+b^4)-2a^6}}{2(a^4+b^4)}.$$

30. Ein anderer Weg zur Gleichung auf SM zu gelangen ist, wenn man MI verlängert, bis sie die grössere Achse in A schneidet, und aus I einen Perpendikel ID auf SC zieht; dann hat man die Dreyecke SBC, SIA, IAD, MAP ähnlich, und es steht SC (a) : SB

$$(\sqrt{a^2+b^2}) = \mathrm{SI}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right) : \mathrm{SA} = \frac{a^2+b^2}{2a}.$$

$$\mathrm{SC}\ (a) : \mathrm{CB}\ (b) = \mathrm{SI}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right) : \mathrm{IA} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a};$$

$$\mathrm{AS}\left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right) : \mathrm{IA}\left(\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}\right) = \mathrm{IA}\left(\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}\right) : \mathrm{AD} = \frac{b^2}{2a}.$$

$$\mathrm{AD}\left(\frac{b^2}{2a}\right) : \mathrm{DP}\left(= \mathrm{CP} - \mathrm{CD} = x - \tfrac{1}{2}a = \frac{2x-a}{2}\right) = \mathrm{AI}\left(\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}\right) : \mathrm{IM} = \frac{(2x-a)\sqrt{a^2+b^2}}{2b},$$

mithin hat man $\mathrm{SM}^2 = \mathrm{MI}^2 + \mathrm{SI}^2 = \mathrm{SP}^2 + \mathrm{PM}^2$, das ist

4(a^2

$$\frac{4(a^2+b^2)x^2-4ax(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2}{4b^2} = a^2-2ax$$
$$+x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Man wird allhier leicht bemerken, daß indem $SD = \frac{1}{2}a$, $DI = \frac{1}{2}b$, DA der vierte Theil des Parameters sey, wie es auch der oben gefundene Ausdruck $\frac{b^2}{2a}$ giebt. Zieht man von $DC = \frac{1}{2}a$ die Linie AD ab, so bleibt $AC = \frac{a^2-b^2}{2a}$, und es steht $2a : \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{a^2-b^2} : AC$, oder AC ist die dritte Proportionallinie auf die größere Achse, und die Eccentricität der Ellipse.

31. XV. Aufgabe. In einer gegebenen Ellipse ein gleichseitiges Sechseck zu beschreiben.

26 Fig. III. Taf. Auflösung. Man hat (26 Fig. III Taf.) $SM = \sqrt{(SP^2+PM^2)} = MN = 2PC$. Nach den vorigen Benennungen wird also seyn $a^2-2ax+xx+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2} = 4x^2$; $a^2+b^2 = 3x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+2ax = \frac{(3a^2+b^2)}{a^2}x^2+2ax$; $\frac{a^2(a^2+b^2)}{3a^2+b^2} = x^2+\frac{2a^3x}{3a^2+b^2}$, $\frac{3a^6+4a^4b^2+a^2b^4+a^6}{(3a^2+b^2)^2} = \frac{4a^6+4a^4b^2+a^2b^4}{(3a^2+b^2)^2} = \frac{a^2(2a^2+b^2)^2}{(3a^2+b^2)^2} = x^2+\frac{2a^3x}{3a^2+b^2}+\frac{a^6}{(3a^2+b^2)^2}$, $x = \frac{-a^3 \pm a(2a^2+b^2)}{3a^2+b^2}$. Es hat also x einen dop-

pelten

pelten Werth, $\frac{a(a^2+b^2)}{3a^2+b^2}$, und $-a$, der letztere aber ist nicht zum Gebrauche.

32. Ein gleichseitiges Sechseck kann man auch auf folgende Art in einer Ellipse beschreiben. Es sey $C\lambda = x$, $B\lambda = b - x$, $\mu\lambda = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$, so wird

$$B\mu^2 = \mu V^2 = 4\mu\pi^2,$$

oder $b^2 - 2bx + x^2 + a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} = 4x^2$,

$$\frac{(a^2+b^2)}{a^2+3b^2} = x^2 + \frac{2b^3x}{a^2+3b^2}.$$

Wenn man diese Gleichung compliert, findet man

$$x = -\frac{b^3}{a^2+3b^2} \pm \frac{b\sqrt{a^4+4b^2(a^2+b^2)}}{a^2+3b^2}.$$

W. zuf. w.

33. XVI. Aufgabe. In einer gegebenen Ellipse ein gleichseitiges Fünfeck zu beschreiben.

Auflösung. Man setze (27 Fig. III Taf.) $PC = x$, $CQ = z$; die übrigen Benennungen beybehalten, wird 27 Fig. III Taf.
$SM = \sqrt{SP^2 + PM^2} = MN = \sqrt{[MH^2 + (PC+CQ)^2]} = NO = 2NQ$, das ist $a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-z^2}\right)^2 + x^2 + 2zx + z^2 = 4b^2 - \frac{4b^2z^2}{a^2}$. Die Gleichung

$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = 4b^2 - \frac{4b^2z^2}{a^2}$ giebt

$z^2 = \frac{2a^3x - (a^2-b^2)x^2 + 3a^2b^2 - a^4}{4b^2}$. Der Werth

des

des z kann also in der ersten Gleichung $b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-z^2} + b^2 - \frac{b^2z^2}{a^2} + x^2 + 2xz + z^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ substituieret werden, und man bekömmt eine Gleichung auf x allein. Indem es aber eine so beschwerliche Berechnung auszuführen der Mühe nicht lohnet, wollen wir hier stehen bleiben, und nur sehen, wie das vorige anzuwenden sey, wenn man um eine gegebene Ellipse Vielecke beschreiben soll.

28 Fig. III Taf. 34. XVII. Aufgabe. Um eine gegebene Ellipse SBſG (28 Fig. III Taf.) ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Nach der XII. Aufgabe beschreibe man in der Ellipse ein gleichseitiges Dreyeck $S\varepsilon\delta$; durch die Mittelpunkte L, O, Q der drey Seiten ziehe man die Halbmesser CLM, CON, CQſ, und ziehe auf M, N, ſ Tangenten, die in A, D, E zusammenstoſſen, so hat man das verlangte Dreyeck. Denn da die Tangenten mit den Seiten des Dreyeckes $S\varepsilon\delta$ parallel sind, müßen alle drey Winkel A, D, E sechzig Grade halten, und die Seiten gleich seyn.

Um aber die Berührungspunkte M, N zu finden, sey CP $= x$, PM $= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, und die ähnlichen Dreyecke SQε, APM, wenn man die gefundenen Werthe von SQ, und Qε gebraucht, geben SQ$\left(\frac{2a^2b\sqrt{3}}{3a^2+b^2}\right)$: Qε $\left(\frac{b(3a^2-b^2)}{3a^2+b^2}\right)$ = AP$\left(\frac{a^2-x^2}{x}\right)$: PM $\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$,

oder

oder $12a^4 : (3a^2 - b^2)^2 = \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} : \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$

$= a^2(a^2 - x^2) : b^2x^2,$

$$a^2(3a^2 - b^2)^2(a^2 - x^2) = a^4(3a^2 - b^2)^2 - a^2x^2 \times (3a^2 - b^2)^2 = 12a^4b^2x^2$$

$$\frac{a^2(3a^2 - b^2)^2}{9a^4 + 6a^2b^2 + b^4} = \frac{a^2(3a^2 - b^2)^2}{(3a^2 + b^2)^2} = x^2$$

$$\pm\frac{a(3a^2 - b^2)}{3a^2 + b^2} = x.$$ W. zuf. w.

35. XVIII. Aufgabe. Um eine gegebene Ellipse ein regelmäßiges Viereck zu beschreiben.

Auflösung. Es sey (29 Fig. III Taf.) $SC = a$, 29 Fig. III Taf.

$BC = b$, $CP = x$, $PM = CH = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Es steht $CP : CS = CS : CT = \frac{CS^2}{CP}$, und $CH : CB = CB : Ct = \frac{CB^2}{CH}$. Wenn also $CT = Ct$, wird $Tt\Theta\vartheta$ das gesuchte Viereck seyn, und man hat demnach

$$\frac{a^2}{x} = \frac{b^2a}{b\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$a\sqrt{a^2 - x^2} = bx$$

$$a^2 - x^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$a^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2}{a^2}$$

$$\frac{a^4}{a^2 + b^2} = x^2, \text{ und } \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = x.$$

W. zuf. w.

36. XIX. Aufgabe. Um eine gegebene Ellipse ein gleichseitiges Sechseck zu beschreiben.

30 Fig. III Taf. Auflösung. Es sey (30 Fig. III Taf.) $CP = x$, $PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$, $AK = BC = b$. Man hat $MP \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) : PT \left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right) = AK\ (b) : KT = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$; $CT - KT = CK = AB = \frac{a^2}{x} - \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$; folglich muß seyn $TA^2 = TK^2 + AK^2 = AD^2 = 4KC^2$, das ist, $\frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2}{x^2} = \frac{4a^4}{x^2} - \frac{4a^3\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} + \frac{4a^2(a^2 - x^2)}{x^2}$, und es wird $(3a^2 + b^2)^2x^4 - 2a^4 \times (13a^2 - 7b^2)x^2 + 33a^8 = 0$, und man sieht schon, wie diese quadratische Gleichung aufzulösen sey. W. zuf. w.

37. XX. Aufgabe. Es werden zwey auf der Spitze entgegengesetzte rechte Kegel gegeben, ALH, 31 Fig. III Taf. ELG (31 Fig. III Taf.); man sucht die algebraische Linie, die durch alle Brennpunkte der Kegelschnitte hindurch geht, wenn man die Kegel jederzeit durch S, als einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt schneidet.

Auflösung. Man lasse auf die Achse der Kegel TL*t* einen Perpendikel SOK fallen, und ziehe durch O die Linie *p*OΠ mit der Seite ELH parallel. Es ist klar, daß *p*Π alle Hauptachsen der Kegelschnitte S*s*, Sσ in C, *κ* gleich abtheile, in dem allezeit SO : OK = SC:

C*s*

$Cf = S\varkappa : \varkappa\sigma$, und geht demnach durch alle Mittelpunkte der Kegelschnitte, gleichwie ELH durch die dem S entgegen stehenden Scheitelpunkte geht. Wir haben erwiesen (15), daß wenn man mit dem Halbmesser $CO = \frac{1}{2}Kf$ aus C einen Cirkel beschreibt, die Brennpunkte f, F bestimmt werden. Eben so bestimmt der mit dem Halbmesser $\varkappa O$ beschriebene Cirkel die Brennpunkte Φ, φ für eine Hyperbel.

Man ziehe aus S auf $p\Pi$ einen Perpendikel SB, so werden SB, OB beständige, und gegebene Größen seyn. Gleichfalls lasse man aus f, F auf $p\Pi$ Perpendikel fallen, und nehme den Punkt O für den Anfang der Abscissen. Es sey $SB = a$, $OB = b$, $O\Pi = x$, $\Phi\Pi = y$, $O\varkappa = v$. Die ähnlichen Dreyecke $BS\varkappa$, $\varkappa\Phi\Pi$ geben $\varkappa B : BS = \varkappa\Pi : \Pi\Phi$, oder $v - b : a = x - v : y$, und es wird $vy - by = ax - av$, oder $vy + av = by + ax$; $v = \frac{ax + by}{y + a}$. Es ist auch $\varkappa\Phi^2 = \varkappa O^2 = \varkappa\Pi^2 + \Phi\Pi^2$, das ist, $v^2 = x^2 - 2vx + v^2 + y^2$, und $2vx = x^2 + y^2$, folglich $v = \frac{x^2 + y^2}{2x}$. Diese zwey Werthe des v zusammen gehalten geben $\frac{ax + by}{y + a} = \frac{x^2 + y^2}{2x}$; $2ax^2 + 2bxy = x^2y + y^3 + ax^2 + ay^2$, oder $y^3 + x^2y + ay^2 - 2bxy - ax^2 = 0$.

Auf gleiche Weise ist Cp $(= Op - OC = x - v) : fp\ (y) = CB\ (v + b) : BS\ (a)$, und $ax - av = vy + by$; $\frac{ax - by}{a + y} = v$. Item $Cf^2 = Cp^2 + fp^2$, oder $v^2 = x^2 - 2vx + v^2 + y^2$; $v = \frac{x^2 + y^2}{2x}$; aus

welchem man $y^3 + x^2y + ay^2 + 2bxy - ax^2 = 0$ erhält, und es wird die vorige Gleichung, wenn man x negativ nimmt. W. zuf. w.

38. Anmerkung. In dem IV. Theile meiner Geometrie habe ich die Aufgabe behandelt: um den gegebenen Brennpunkt, (welcher dem S entspricht), einen Kegelschnitt zu beschreiben, der die gegebene Linie TL in dem gegebenen Punkte L berührt. (N. 169); und darauf (N. 171) habe ich die Linie gesucht, welche durch die Scheitelpunkte aller Kegelschnitte, die das Bedingniß der Aufgabe erfüllen, hindurch geht. Die ganze Vorrichtung, und auch die Gleichung, sammt den beständigen Größen a, b, ist die nämliche mit der gegenwärtigen, die durch die Brennpunkte geht. Nur dieses ist der Unterschied, daß allhier die Brennpunkte in den Aesten LΦN, QφS für die Hyperbeln; die Brennpunkte aber in den Aesten LOQ, SOfn für die Ellipsen gehören; da in angeführter Aufgabe die Scheitelpunkte der Ellipsen in den Aesten LΦN, QφS; jene aber der Hyperbeln sich in LOFQ, SOfn befanden; und man weiß ohne das, daß wenn die Entfernung der Brennpunkte für die Länge der Achse, und diese für den Abstand der Brennpunkte gebraucht wird, sich die Ellipsen in Hyperbeln, und die Hyperbeln in Ellipsen verwandeln müßen. Ich melde hier nichts von den Eigenschaften, und Asymptoten der gefundenen Linie; denn die Ursache, die mich bewog, diese Aufgabe hier einzuschalten, war nicht die Linie selbst, sondern ich wollte durch dieses Beyspiel darthun, daß öfters die nämliche Aufgabe unter einer sehr verschiedenen Gestalt könne vorgetragen werden, also, daß man anfänglich glauben sollte, man würde einer ganz andern Auflösung vonnöthen haben.

39.

39. XXI. Aufgabe. Einen rechten Kegel BVE (32 Fig. III Taf.), der gegeben wird, also durch AB zu schneiden, daß der Durchschnitt die größte Ellipse gebe. 32 Fig. III Taf.

Auflösung. Da die Länge des Kegels bestimmt ist, und alle Parallelschnitte ähnliche Ellipsen geben, ist klar, daß wenn alles sonst gleich ist, jene die größte seyn müße, welche der Grundfläche des Kegels die nächste ist. Ueber dies darf man hier die Cirkel nicht mit unter die Ellipsen rechnen.

Dieses vorgemerkt sey $VC = a$, $CB = r$, $VP = x$, $AQ = PC = a - x$, $PA = \frac{rx}{a}$, das Quadrat der Hälfte der kleineren Achse $BC \times PA = \frac{r^2x}{a}$, $BQ = r + \frac{rx}{a} = \frac{ar + rx}{a}$, $BR = \frac{1}{2}BQ = \frac{ar + rx}{2a}$, $DR = \frac{1}{2} \times (a - x)$, und es wird $BD^2 = DA^2 = BR^2 + DR^2$

$$= \frac{a^2r^2 + 2ar^2x + r^2x^2}{4a^2} + \frac{a^2 - 2ax + x^2}{4} = \frac{a^2r^2 + 2ar^2x + r^2x^2 + a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{4a^2} = \frac{a^2(a^2 + r^2) - 2a(a^2 - r^2)x + (a^2 + r^2)x^2}{4a^2}.$$

Die Räume der Ellipsen sind in dem Verhältniße der Produkte der Halbachsen, das ist, wie $\sqrt{\frac{r^2x}{a}} \times \frac{\sqrt{a^2(a^2 + r^2) - 2a(a^2 - r^2)x + (a^2 + r^2)x^2}}{2a}$. Ist dieses ein Größtes, so wird auch das Quadrat mit Hin-

weglassung der beständigen Größe $\frac{a^2}{4r^3}$ eines seyn, nämlich $a^2(a^2+r^2)x - 2a(a^2-r^2)x^2 + (a^2+r^2)x^3$, folglich $a^2(a^2+r^2)dx - 4a(a^2-r^2)xdx + 3(a^2+r^2)\times x^2dx = 0$, oder $x^2 - \frac{4a(a^2-r^2)x}{3(a^2+r^2)} = \frac{-a^2}{3} = \frac{-3a^2}{9}$. Wenn man die Gleichung compliert, erhält man $x = \frac{2a(a^2-r^2)}{3(a^2+r^2)} \pm \frac{a\sqrt{a^4-14a^2r^2+r^4}}{3(a^2+r^2)}$. Das zweyte Differential wird negativ, wenn man für den Werth des x, $\frac{2a(a^2-r^2) - a\sqrt{a^4-14a^2r^2+r^4}}{3(a^2+r^2)}$ nimmt; nimmt man aber das Radical mit dem Zeichen $+$, so wird es positiv, und das Gesuchte wäre ein Kleinstes. Allein man muß das Radical selbst in Betrachtung ziehen.

Denn damit die Auflösung möglich sey, muß es entweder verschwinden, oder positiv seyn. Wenn es verschwindet, wird das dritte Differential positiv, und man erhält weder ein Größtes, noch ein Kleinstes, da die Gleichung nur des dritten Grades ist, und die Linie, die dadurch kann vorgestellt werden, nur eine einfache widrige Beugung haben kann.

Das Radical verschwindet, wenn $r = a\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}}$.

Man setze $\frac{a}{m} = r$, so wird das Radical eine positive Größe seyn, wenn $m^2 > \sqrt{14m^2 - 1}$. Ich nehme $m = 3$, mithin $m^2 = 9$, $\sqrt{14m^2 - 1} = \sqrt{14.9 - 1} = \sqrt{125}$, welches größer ist, denn 9, und bleibt also das Radi-

Radical negativ. Setzet man aber $m = 4$, wird $16 > \sqrt{223}$, und das Radical positiv. Will man, daß m eine ganze Zahl sey, muß sein Quadrat wenigstens aus 2 Ziffern bestehen. Im Falle, da $m = 4$, wird der Winkel BVE des Kegels etwas größer, als 28° 2′.

Gleichwie wir aber gesetzt haben $\frac{a}{m} = r$, um das Radical positiv zu erhalten, also kann man auch annehmen $\frac{r}{m} = a$, und dann wird die Spitze des Kegels einen sehr stumpfen Winkel, beynahe von 151° 33′ haben. Sollte endlich das Radical verschwinden, kann man $r = a\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ annehmen, und der Winkel des Kegels wird beynahe $30^\circ\frac{1}{2}$; nähme man aber $r = a \times \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$, so würde der Winkel beynahe 150°. Aus diesem erhellet, daß die Fälle, in welchen die Aufgabe eine Auflösung zuläßt, sehr enge Gränzen haben. Sie werden aber noch mehr eingeschränkt, aus Ursache, weil x jederzeit positiv seyn muß. Zum Beyspiele kann man nur $r = \frac{a}{4}$, nicht aber $a = \frac{r}{4}$ setzen; denn im letzteren Falle würde $x = \frac{-a(30 \pm 4\sqrt{2})}{51}$. Eben darum, wenn das Radical verschwinden sollte, kann man nur den gespitzten Winkel des Kegels gebrauchen, ohne ein Größtes, oder Kleinstes zu bekommen.

40. XXII. Aufgabe. Man sucht die längste Linie BE (23 Fig. II Taf.), die aus dem Scheitelpunkte B der kleineren Achse einer gegebenen Ellipse auf derselben Umkreis kann gezogen werden. 23 Fig. II Taf.

Auflösung. Man setze BF $= x$, FE $= \frac{a}{b} \times \sqrt{bx - xx}$, so wird $x^2 + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{b^2} = \frac{a^2x}{b} - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{b^2} =$ BE^2, und wenn es ein Größtes seyn soll, $\frac{a^2dx}{b} - \frac{2(a^2 - b^2)xdx}{b^2} = 0$, oder $\frac{a^2}{b} = \frac{2(a^2 - b^2)x}{b^2}$, mithin $x = \frac{a^2b}{2(a^2 - b^2)}$. W. zuf. w.

41. Anmerkung. Obschon das zweyte Differential $- \frac{(a^2 - b^2)dx^2}{b^2}$ jederzeit negativ bleibt, mithin ein Größtes anzeigt, so muß man doch die Gränzen für den Werth x suchen.

Erstens kann x nicht größer seyn, denn b, und dann, wenn x den größten Werth giebt, wird $a^2 = 2a^2 - 2b^2$, folglich $a^2 = 2b^2$, ein Bedingniß der Ellipse, wenn x dem b sollte gleich werden.

Will man, daß $x < b$, zum Beyspiele $\frac{nb}{m}$, (es wird $n < m$ angenommen), so setze man $\frac{a^2}{2a^2 - 2b^2} = \frac{n}{m}$, $a^2 = \frac{2na^2 - 2nb^2}{m}$, $\frac{2nb^2}{m} = \frac{2na^2 - ma^2}{m} = \frac{(2n - m)a^2}{m}$. Es sey $n = 2$, $m = 3$, so wird $\frac{4b^2}{3} = \frac{a^2}{3}$, $4b^2 = a^2$, $2b = a$.

Zwey-

Zweytens kann b nicht $= 0$ seyn, mithin muß $2n > m$ seyn; denn sonst würde $\frac{(2n - m)a^2}{m} = 0$, oder negativ, welches unmöglich ist. Die Gränze also für den kleinsten Werth des x ist $\frac{1}{2}b$, welche doch niemals kann erreicht werden, wenn nicht die Ellipse verschwinden soll, denn in dieser Voraussetzung wird $-b^2 = 0$. Die letzten zwey Aufgaben findet man auch bey Simpson; wir wollen noch eine ähnliche hinzusetzen.

42. XXIII. Aufgabe. Aus dem in der kleineren Achse BG (33 Fig. III Taf.) gegebenen Punkte A auf den Umkreis der Ellipse die längste Linie zu ziehen. 33 Fig. III Taf.

Auflösung. Man nenne AB $= g$, BP $= x$, PM $= y = \frac{a}{b}\sqrt{bx - xx}$, so wird AP $= x - g$, AM$^2 = x^2 - 2gx + g^2 + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{b^2} = \left(\frac{a^2}{b} - 2g\right)x - \frac{(a^2 - b^2)}{b^2}x^2 + g^2 = (a^2b - 2b^2g)x - (a^2 - b^2)x^2 + b^2g^2$, und wenn es ein Größtes ist, $b(a^2 - 2bg)dx = (2a^2 - 2b^2)xdx$; $\frac{b(a^2 - 2bg)}{2(a^2 - b^2)} = x$.

Das zweyte Differential wird $-\frac{(a^2 - b^2)dx^2}{b^2}$, und da $a > b$, ist es negativ. Allein wenn $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}(a^2 - 2bg)$, wird $x = b$; ist aber $a^2 - b^2 < \frac{(a^2 - 2bg)}{2}$, wird $x > b$, welches unmöglich ist. Setzet man $a^2 - 2bg = a^2 - b^2$, wird $x = \frac{1}{2}b$, $g = \frac{1}{2}b$, und die längste Linie wird $\frac{1}{2}a$. Ist $2a^2 - 2b^2 = a^2 - 2bg$, oder $a^2 = 2b^2 - 2bg$, oder $\frac{a^2}{2b} = b - g$,

wird $g = b - \frac{a^2}{2b} = \frac{2b^2 - a^2}{2b}$; es muß also in diesem Falle $2b^2 > a^2$ seyn. Allein wir wollen die Auflösung dieser Aufgabe durch die folgende in ein noch größeres Licht setzen.

43. XXIV. Aufgabe. Eine bey dem Pole zusammengedrückte Elliptoide zu finden, deren Durchschnitt die gegebene Ellipse giebt, in welcher auf einen in der kleineren Achse gegebenen Punkt aus dem Pole der Elliptoide ein Perpendikel kann gezogen werden.

34 Fig. IV Taf. Auflösung. Die Hälfte der größeren Achse der gegebenen Ellipse sey CS $= a$ (34 Fig. IV Taf.), die Hälfte der kleineren CG $= b$. Die größere behalte man für die Elliptoide bey, die kleinere aber nehme man $=$ CB $<$ GC, und nenne sie $= x$, dann stelle man sich vor, die gesuchte Elliptoide werde durch die Umdrehung der Ellipse ASBs um die Achse AB $= 2x$ gestaltet. Wenn man den Cirkelbogen GM aus C beschreibt, wird MCm der Durchschnitt seyn, der die Ellipse giebt. Indem aber in einer gegebenen Entfernung von dem Mittelpunkte Cd ein Perpendikel bB auf die kleinere Achse CM fallen muß, beschreibe man aus C mit dem Halbmesser Cd einen Quadranten, der den auf CB beschriebenen Halbcirkel in b schneidet; dann werden die Dreyecke CbB, CPM ähnlich. Es sey Cd = Cb $= g$, und es steht CB (x) : Cb (g) = CM (b) : CP $= \frac{bg}{x}$; MP $= \sqrt{CM^2 - CP^2} = \sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2g^2}{x^2}\right)} = \frac{b}{x}\sqrt{x^2 - g^2}$; PB $= x - \frac{bg}{x}$, PA $= x + \frac{bg}{x}$. Aus der Eigenschaft der Ellipse haben wir MP²

(b^2x^2

$$\left(\frac{b^2x^2 - b^2g^2}{x^2}\right) : CS^2\,(a^2) = BP \times PA\left(\frac{x^4 - b^2g^2}{x^2}\right) :$$

$CB^2\,(x^2)$, oder $b^2x^2 - b^2g^2 : a^2 = x^4 - b^2g^2 : x^2$;

$$b^2x^4 - b^2g^2x^2 = a^2x^4 - a^2b^2g^2$$

$$(a^2 - b^2)x^4 + b^2g^2x^2 = a^2b^2g^2$$

$$x^4 + \frac{b^2g^2x^2}{a^2 - b^2} + \frac{b^4g^4}{4(a^2 - b^2)^2} = \frac{a^2b^2g^2}{a^2 - b^2} + \frac{b^4g^4}{4(a^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{4a^4b^2g^2 - 4a^2b^4g^2 + b^4g^4}{4(a^2 - b^2)^2} = \frac{4a^2b^2g^2(a^2 - b^2) + b^4g^4}{4(a^2 - b^2)^2};$$

$$x^2 = \frac{-b^2g^2}{2(a^2 - b^2)} \pm \frac{bg\sqrt{4a^2(a^2 - b^2) + b^2g^2}}{2(a^2 - b^2)}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{(-b^2g^2 + bg\sqrt{4a^2(a^2 - b^2) + b^2g^2})}}{\sqrt{2(a^2 - b^2)}}.$$

Die übrigen zwey Wurzeln sind unmöglich, und die Werthe des x sind keinem Zweifel unterworfen. W. zuf. w.

44. Jetzt auf die vorige Aufgabe zurück zu kommen, sey (35 Fig. IV Taf.) MLm die gegebene Ellipse in der gefundenen Elliptoide SBfA, Mm die kleinere, Sf die größere Achse; der gegebene Punkt sey D. Um die größte Linie, die aus D auf den Umkreis MLm kann gezogen werden, zu bestimmen, suche man nach der XXII. Aufgabe die größte Linie, die aus B auf den Umkreis des Meridians SBfA der Elliptoide kann gezogen werden. Fällt diese in m, so wird Dm die gesuchte seyn; fällt sie unter m in v, oder A, so ist die gesuchte wieder Dm. Denn in dieser Voraussetzung wachsen alle Linien BN, Bm rc.. bis in v, oder A, und ist also Bm der größten Bv, oder BA die nächste. Fällt endlich die größte BN in N über m, so beschreibe man durch N einen Parallelcirkel, der die Ellipse in L schnei- 35 Fig. IV Taf.

det,

det, und DL wird die gesuchte Linie seyn; denn da alle Meridiane in der Elliptoide gleich sind, muß auch die Senne BL mit der Senne BN gleich seyn, mithin ist $DL^2 + DB^2 = BL^2$; indem aber DB eine beständige Größe ist, muß auch $DL^2 = BL^2 - BD^2$ ein Größtes seyn, wenn BL^2 eines ist. Eben so ist Bm die größte aus allen, die bis auf die Ellipse MLm reichen; folglich ist $Bm^2 - BD^2$ ein Größtes.

36 Fig. IV Taf. 45. XXV. Aufgabe. In einer gegebenen Ellipse das größte Dreyeck zu bestimmen, dessen Grundlinie mit einer der Hauptachsen parallel ist.

Auflösung. Es sey (36 Fig. IV Taf.) $BH = x$, $HM = HN = \frac{a}{b}\sqrt{bx - xx}$, so wird der Raum des Dreyeckes $NBM = HM \times BH = x \times \frac{a}{b} \times \sqrt{bx - xx} = \frac{a}{b}\sqrt{bx^3 - x^4}$, und wenn dieses ein Größtes seyn sollte, wird $\frac{3abx^2dx - 4ax^3dx}{2b\sqrt{\cdot bx^3 - x^4}} = 0$, folglich $3bx^2 = 4x^3$, oder $\frac{3}{4}b = x$. Aus diesem Werthe wird $HM = \frac{a}{b}\sqrt{(\frac{3}{4}b^2 - \frac{9}{16}b^2)} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{3}{16}b^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, und der Raum $= \frac{3ab\sqrt{3}}{16}$.

Itzt setze man $SQ = x$, $QD = QE = \frac{b}{a} \times \sqrt{ax - xx}$, so wird der Raum des Dreyeckes SDE $= \frac{b\sqrt{ax^3 - x^4}}{a}$, und $\frac{3abx^2dx - 4bx^3dx}{2a\sqrt{ax^3 - x^4}} = 0$, $\frac{3}{4}a = x$.

$= x$. Man erhält $QD = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{9}{16}a^2} = \frac{b\sqrt{3}}{4}$, und der Raum wird $\frac{3ab\sqrt{3}}{16}$; mithin sind die Räume der Dreyecke BNM, SDE gleich. W. zuf. w.

46. I. Anmerkung. Wir haben also gefunden, daß BH : SQ $= \frac{3}{4}b : \frac{3}{4}a$, und CH : CQ $= \frac{1}{4}b : \frac{1}{4}a = b : a$, und wenn man das ganze Verfahren in der Auflösung betrachtet, so erhellet, daß die Dreyecke allemal gleich seyn müßen, wenn die Abscissen in dem Verhältnisse der Achsen stehen, es mögen hernach die Dreyecke die größten seyn, oder nicht. Aus dieser Anmerkung entsteht die weitere Frage, ob auch jene Dreyecke gleich sind, derer Grundlinie mit ihren Durchmessern parallel, und die Abscissen in dem Verhältnisse der Durchmesser genommen werden? Es seyen also ED, BG zwey Mitdurchmesser (37 Fig. IV Taf.); in ED nehme man 37 Fig. IV Taf. DP $= x$, ED $= c$, BG $= f$, PM $=$ PN $= \frac{f}{c} \times \sqrt{cx - xx}$; den Winkel BCD $= \varphi$, so wird stehen $1 : \sin.\varphi =$ PD $(x) : x \sin.\varphi$, und dieses wird die Höhe des Dreyeckes NDM seyn, dessen Raum demnach $= x \times \sin.\varphi \times \frac{f}{c}\sqrt{cx - xx}$. Itzt nehme man in GB $= f$ die Abscisse QG $= z$ also, daß stehe ED : GB $= c : f =$ DP (x) : GQ (z), und man hat $z = \frac{fx}{c}$. Die Höhe des Dreyeckes GOL wird $\frac{fx \sin.\varphi}{c}$, QO $=$ QL $= \frac{c}{f}\sqrt{fz - z^2} = \frac{c}{f} \times$

$\sqrt{f^2x}$

$\sqrt{\frac{f^2x}{c}-\frac{f^2x^2}{c^2}}=\frac{cf}{cf}\sqrt{cx-xx}=\sqrt{cx-xx}$, und des Raum $=\frac{fx\ fin.\ \phi}{c}\times\sqrt{cx-xx}$. Es sind also die Dreyecke DMN, GOL gleich.

Endlich wollen wir setzen, Sſ sey die größere Achse, und SR (x) : Sſ (a) = DP (z) : DE (c); so wird HKS $=\frac{bx}{a}\sqrt{ax-xx}$, und NMD $=\frac{fz\ fin.\ \phi}{c}\times\sqrt{cz-z^2}$. Man gebrauche den Werth $z=\frac{cx}{a}$, so wird $\frac{fcx\ fin.\ \phi}{ac}\sqrt{\frac{c^2x}{a}-\frac{c^2x^2}{a^2}}=\frac{fcx\ fin.\ \phi}{a^2}\times\sqrt{ax-xx}$. Nun weiß man aus den Kegelschnitten, daß $fc\times fin.\ \phi=ab$, und man bekömmt $\frac{abx}{a^2}\times\sqrt{ax-xx}=\frac{bx}{a}\sqrt{ax-xx}$; es ist demnach auch HSK = NDM, und der Raum des größten Dreyeckes kann durch einen jeden Durchmesser erhalten werden.

Es folgt also, daß um einen gegebenen Durchmesser nur ein größtes Dreyeck möglich sey, jedoch könne man um einem jedweden ein gleichgroßes beschreiben, und jene, die um die Hauptachsen beschrieben werden, haben nichts besonderes, als daß sie gleichschenklicht sind.

38 Fig. IV Taf. 47. II. Anmerkung. Wenn man (38 Fig. IV Taf.) das kleinste Dreyeck ETD auf gleiche Art sucht, welches um die größere Achse Sſ kann beschrieben werden, findet man SP $=\frac{1}{2}$SC, ST = SC; und wenn man es um die Achse BG beschreibt, wird BQ $=\frac{1}{2}$BC, Bt =

CB,

CB, und der Raum eines jedweden $= 3SC \times CB\sqrt{3}$, oder wenn $Sf = a$, $BG = b$, $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$. Sie verhalten sich demnach zu jenen, die nach der XXV. Aufgabe in der Ellipse beschrieben werden, wie 4 : 1; die Seiten aber wie 2 : 1; denn die Dreyecke sind ähnlich, indem steht $\frac{3}{4}a : \frac{b\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a : \frac{b\sqrt{3}}{2}$, das ist (Fig. 36) SQ : QD = (Fig. 38) Tf : fD; und (Fig. 36) BH : HM = (Fig. 38) tG : Gd.

Man ersieht schon, daß um einen beliebigen Durchmesser ein mit ETD gleiches Dreyeck kann beschrieben werden, wenn dieser sich zur Abscisse verhält, wie Sf zu SP, mithin finden alle Folgen statt, die wir in der vorigen Anmerkung gemacht haben.

48. Noch eines. Gleichwie sich die Sphäroide, welche durch die Umdrehung der nämlichen Ellipse um die Achse Sf erzeugt wird, zu jener, die die Umdrehung um die Achse BG giebt, wie CB zu CS verhält; also ist auch der Kegel, welcher durch die Umdrehung des Dreyeckes TfD um die Achse Tf entsteht, zu dem Kegel, den das Dreyeck tGd, wenn es um tG gedrehet wird, giebt, wie CB zu CS. Denn der Schwerepunkt des Dreyeckes fTD ist in der Linie CG von dem Mittelpunkte der Ellipse C um $\frac{2}{3}b\sqrt{3}$ entfernt; der Schwerepunkt aber des Dreyeckes dGt liegt in der Linie Cf in einer Entfernung von C, welche $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$ beträgt. Da nun die Dreyecke gleich sind, müßen die entstehenden Körper sich wie der Abstand des Schwerepunkts von der Achse verhalten. Eben dieses ist von den größten Dreyecken, die in der Ellipse beschrieben werden (36 Fig. IV Taf.) zu verstehen. 36 Fig. IV Taf.

Da

Da ein gleiches Verhältnis der Abscissen gegen ihre Durchmesser uns so verschiedene gleiche Räume verschafft, wollen wir in folgender Aufgabe sehen, ob es auch in den Segmenten eben diese Richtigkeit habe.

39 Fig. IV Taf. 49. XXVI. Aufgabe. Dem auf der Hauptachse Ss (39 Fig. IV Taf.) gegebenen Segmente SMP ein anderes Gleiches auf einen beliebigen Durchmesser DE, nämlich DNQ zu bestimmen.

Auflösung. Es sey SC $= \frac{1}{2}a$, BC $= \frac{1}{2}b$, DC $= \frac{1}{2}c$, der Mitdurchmesser $= f$, SP $= x$, DQ $= z$, und Ss (a) : DE (c) = PS (x) : DQ (z), und es wird $z = \frac{cx}{a}$, $dz = \frac{cdx}{a}$. Das Element von SMP wird $\frac{bdx}{a}\sqrt{ax - xx}$, und von DNQ, $\frac{fdz\ \text{sin.}\ \varphi}{c} \times \sqrt{cz - zz}$. Man substituiere den Werth des z, so wird das letztere $\frac{fc\ \text{sin.}\ \varphi dx}{ac}\sqrt{\frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}} = \frac{fc\ \text{sin.}\ \varphi dx}{a^2}\sqrt{ax - xx}$. Es ist aber $fc\ \text{sin.}\ \varphi = ab$, und es wird also $\frac{abdx}{aa}\sqrt{ax - xx} = \frac{bdx}{a}\sqrt{ax - xx}$. Sind die Elemente gleich, so müßen nothwendig auch die Integrale gleich seyn, das ist, SMP = DNQ. W. zuf. w.

50. I. Zusatz. Indem Ss : PS = DE : DQ, oder $a : c = x : z$, so ist auch $x : z =$ PC : QC, und das Dreyeck PMC = QNC; denn jenes wird PC $\times \frac{1}{2}$PM; dieses aber QC $\times$ sin. $\varphi \times \frac{\text{NQ}}{2} = \frac{c}{a} \times$

PC

$$PC \times \sin.\phi \times \tfrac{1}{2}\frac{f}{c}\sqrt{cz - zz} = \frac{fc\sin.\phi \times PC\sqrt{ax - xx}}{2a^2}$$

$$= \frac{b}{a} \times \frac{PC\sqrt{ax - xx}}{2} = PC \times \tfrac{1}{2}PM.$$ Wenn man also die Halbmesser CM, CN zieht, sind auch die Schnitze SMC, DNC gleich.

Man setze ferner $Sf : DE = CF : Cf$ (es ist F der Brennpunkt), und man erweiset auch auf gleiche Art, daß die Dreyecke CMF, CNf gleich sind. Indem nun CMEf = CNBE, wird auch FMEf = fNBE. Aus diesem ersieht man, wie man gleiche Segmente, gleiche Schnitze auf dem Mittelpunkte, und gleiche Schnitze aus dem Brennpunkte F bestimmen könne. Die Punkte f aber auf allen Durchmessern zu bestimmen, kann man annehmen $Cf : CB = CF : C\phi$, und mit den Halbachsen CF, $C\phi$ eine mit der gegebenen ähnliche Ellipse $Ff\phi$ beschreiben, und es wird immer seyn $Cf : CE = CF : Cf$.

51. II Zusatz. Mit der Hyperbel hat es ein gleiches Bewandtniß, wie mit der Ellipse. Es sey NSL (40 Fig. IV Taf.) eine nach der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$, CP = x, PM = y, CS = a, und die Mitachse = b, CM = g, MV = MI = f. Man nehme CQ = $z = \frac{gx}{a}$; NQ sey mit VI parallel, so wird der Raum MNQ = $\int \frac{f}{g} \sin.\phi dz \sqrt{z^2 - g^2}$ 40 Fig. IV Taf.

$$= \int \frac{fgdz \sin.\phi}{ag}\sqrt{\frac{g^2x^2}{a^2} - g^2} = \int \frac{fgdx \sin.\phi}{a^2} \times \sqrt{x^2 - a^2}.$$ Es ist aber $fg \sin.\phi = ab$, mithin

$MNQ = \int \frac{bdx}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, welches eben den Raum SMP ausdrückt, und muß demnach SMP = MNQ seyn. Wenn man nähme CS : CM = SF : Mφ, würde durch die einzige Substitution des $\frac{gx}{a}$ für z dargethan werden, daß man gleiche Sectores SMF, MNφ bekomme, mithin auch gleiche Sectores aus dem Mittelpunkte C, nämlich CNM, CMS.

41 Fig. IV Taf. Setzen wir (41 Fig IV Taf.) CP $= x$, PM $= y$, so wird das Differential des äußeren Raumes SMOC $= xdy = \frac{bx^2dx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$. Nun sey CA $= g$, AV $= f$, CQ $= z$, CAI $= \varphi$, und $a : g = x : z = \frac{gx}{a}$, und das Differential des Raums ANKC $= \frac{fz^2dz \; sin. \varphi}{g\sqrt{z^2 - g^2}}$

$$= \frac{f\frac{g^2x^2}{a^2} \times \frac{gdx}{a} \times sin. \varphi}{g\sqrt{\frac{g^2x^2}{a^2} - g^2}} = \frac{fgx^2dx \; sin. \varphi}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}},$$ oder

da $fg \; sin. \varphi = ab$, $= \frac{abx^2dx}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{bx^2dx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$, welches ebenfalls das Differential des Raums CSMO ist, und es muß demnach die Gleichheit der Räume selbst erfolgen.

52. Anmerkung. Ich muß hier noch eine Anmerkung über die Hyperbel anbringen. ASMN (42 Fig. V Taf.) sey eine zwischen den Asymptoten BC, CR; SC sey die Hälfte der Querachse. Es ist bekannt, daß

42 Fig. V Taf.

wenn

wenn CP : CQ = CQ : CR die Räume PSMQ, QMNR gleich sind. Die Dreyecke CSP, CMQ, CNR sind ebenfalls gleich; denn es ist CP : CQ = MQ : PS, und CP : CR = NR : SP. Von den Dreyecken CSP, CMQ nehme man den gemeinschaftlichen Raum CKP hinweg, und setze zu CKS = KPQM den Raum SKM hinzu, und es wird SCM = SPQM. Eben so zeigt es sich, daß der Sector SCN dem Raume SPRN gleich sey. Wir wollen itzt setzen, es werde der Sector SCN gegeben, und man verlange denselben durch CM in zwey gleiche Theile zu schneiden. Aus dem, was wir nur itzt vorgemerkt haben, erhellet, daß man diese Theilung erlange, wenn man zwischen CP, CR die mittlere Proportionallinie CQ sucht, und die Ordinate QM errichtet.

53. XXVII. Aufgabe. NMSO (43 Figur V. Taf.) sey eine Parabel nach der Gleichung $y = \sqrt{px}$; man verlangt dem Raume SMP einen gleichen um einen Durchmesser MK zu bestimmen. 43 Fig. V Taf.

Auflösung. Man ziehe auf M die Tangente MT, und SV mit MP parallel, so wird SMP = $\frac{2}{3}$SVMP. Dann ziehe man SQ mit TM parallel, und es wird TS = SP = MQ, und MSQ = $\int d.$ MQ × QS × $\mathit{sin.}\ \phi$. Nun aber ist MQ = x, $d.$ MQ = dx, 1 : $\mathit{sin.}\ \phi$ = TM (= SQ) : MP, oder MP = $\mathit{sin.}\ \phi$ × SQ, und es wird $\int d.$ MQ × QS × $\mathit{sin.}\ \phi = \int dx$ × MP = SMP.

Wenn Tϕ = SF, und ϕf mit MT parallel ist, hat man gleichfalls SF = Mf, fQ = FP, und die Dreyecke FMP, fSQ, wie auch die Sectores MSf, SMF gleich.

Man nehme MK = SR, und ziehe KO mit QS parallel, wie auch NR mit MP, und OL, so steht

$MP : NR = \sqrt{SP} : \sqrt{SR} = \sqrt{MQ} : \sqrt{MK}$, und

$QS : KO = \sqrt{MQ} : \sqrt{MK}$; folglich

$MP : NR = QS : KO$. Es ist aber auch

$QS : MP = KO : OL$. Diese zwey Analogien zusammengesetzt geben also

$QS : NR = QS : OL$, oder $NR = OL$.

Es ist $SNR = \frac{2}{3} NR \times SR$, $MOK = \frac{2}{3} MK \times KO \times fin. \phi = \frac{2}{3} SR \times KO \times fin. \phi$; und $1 : fin. \phi = KO : OL$, das ist, $KO \times fin. \phi = OL = NR$, und $MOK = \frac{2}{3} NR \times SR$. W. zuf. w.

44 Fig. V Taf. 54. Zusatz. Wenn SNR (44 Fig. V Taf.) gegeben wird, und man verlangt einen gleichen Raum um den gleichfalls gegebenen Durchmesser MK, so ziehe man auf M eine Tangente MT, und mache $MK = SR$, OKL mit MT parallel, so wird MOK, oder MLK dem SNR gleich seyn, wie aus der Auflösung erhellet. Zieht man SQ mit MT parallel, so wird $MSQ = SMP$, folglich auch $PMNR = QSOK = QHLK$.

55. Anmerkung. Wenn in zweyen Ellipsen die Hauptachsen in einem umgekehrten Verhältnisse stehen,

45 Fig. V Taf. nämlich (45 Figur V Taf.) $Sf : ST = GK : CB$, oder wenn $Sf = a$, $ST = g$, $2GK = c$, $2BC = b$, und man nimmt $a : g = SP\ (x) : SQ\ (z)$, so werden die Räume SMP, SNQ gleich; denn man hat das Element von $SNQ = \frac{cdz}{g}\sqrt{gz - zz}$, oder da

$\frac{gx}{a} = z$, $\frac{gdx}{a} = dz$, $\frac{cgdx}{ag}\sqrt{\frac{g^2x}{a} - \frac{g^2x^2}{a^2}} = \frac{cgdx}{a^2} \times \sqrt{ax - xx}$, das ist, wenn man für cg ein gleiches ab gebraucht, $= \frac{abdx}{aa}\sqrt{ax - xx} = \frac{bdx}{a}\sqrt{ax - xx}$,

wel-

welches das Differential von SMP ist. Nimmt man $a : g = \text{SF} : \text{S}\phi$, so wird ebenfalls $\text{S}a\text{MF} = \text{S}o\text{N}\phi$; $\text{S}a\text{MC} = \text{S}o\text{NK}$ rc.

56. Eben dieses läßt sich von zweyen Hyperbeln verstehen, wenn die Produkte ihrer Hauptachsen gleich sind, und die Abscissen in dem Verhältnisse der Querachsen genommen werden.

Wenn in zweyen Parabeln die Abscissen in dem umgekehrten Verhältnisse der Cubicwurzeln der Parameter genommen werden, oder $z : x = \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{\pi}$, werden auch die Räume gleich; denn sie sind $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$, und $\frac{2}{3}z\sqrt{\pi z}$, das ist $\frac{2}{3}\sqrt{px^3}$, und $\frac{2}{3}\sqrt{\pi z^3}$; wenn also $z : x = \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{\pi}$, oder $z^3 : x^3 = p : \pi$, wird $\pi z^3 = px^3$, folglich auch $\frac{2}{3}\sqrt{\pi z^3} = \frac{2}{3}\sqrt{px^3}$. Nachdem wie aber gezeigt haben, wie man auf einem jedweden Durchmesser einen gleichen Raum mit jenem, der auf einer Hauptachse gegeben wird, bestimmen könne, versteht es sich schon, wie alles, was von gleichen Räumen in einem Kegelschnitte gesagt worden ist, auch auf andere anzuwenden sey, welche nach dieser Anmerkung das erforderte Bedingniß haben.

57. Wenn endlich in zweyen Ellipsen (46 Fig. V Taf.) $\text{SG}t$, $\text{SB}f$, deren Hauptachsen $\text{S}t = a$, $2\text{KG} = b$, $\text{S}f = c$, $2\text{CB} = f$, und $ab : cf = m : n$ steht, wie auch $a : c = \text{SQ} : \text{SP} = x : z$, wird das Segment SNQ zu dem Segmente SMP in dem gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehen. Denn es wird SMP 46 Fig. V. Taf.

$$= \int \frac{fdz}{c}\sqrt{cz - zz},\ \text{SNQ} = \int \frac{bdx}{a}\sqrt{ax - xx}.$$

Man gebrauche die Werthe von z und dz, nämlich

$\frac{cx}{a}$, $\frac{cdx}{a}$, so wird das erste $\int\frac{fcdx}{ac}\sqrt{\frac{c^2x}{a}-\frac{c^2x^2}{a^2}}=\int\frac{fcdx}{aa}\sqrt{ax-xc}$; es ist aber $fc=\frac{nab}{m}$, mithin $\int\frac{fcdx}{aa}\sqrt{ax-xx}=\int\frac{nbdx}{ma}\sqrt{ax-xx}=\frac{n}{m}\times\int\frac{bdx}{a}\sqrt{ax-xx}$; folglich SNQ : SMP $=\int\frac{bdx}{a}\times\sqrt{ax-xx}:\frac{n}{m}\int\frac{bdx}{a}\sqrt{ax-xx}=m:n.$

Anhang

zur V. Aufgabe.

1. Nachdem ich in der vorigen Abhandlung die Aufgabe: zwischen zwey gegebenen Punkten auf einer krummen Fläche den kürzesten Bogen zu beschreiben, für die Elliptoide durch eine Partikularmethode aufgelößt habe, fand ich weiter keinen andern Körper, bey dem die Anwendung einen anderen Nutzen haben könnte, als die Uebung der Geometrie, und begnügte mich im Anhange mit der Hyperboloide, und Paraboloide, in Gegenwart aber mit einem Beyspiele, welches ich von einem ordinären Kegel hernahm. Indem man aber einen vielleicht nicht ungegründeten Zweifel haben könnte, ob jener Grund, dessen ich mich sowohl bey der Elliptoide, als hier bey dem Kegel bediente, auch bey anderen krummen Flächen anwendbar sey, das ist, ob zur Auflösung erfordert, und hinlänglich sey, daß die Normalen des kürzesten Bogens, und jenes,

der auf den kürzesten perpendikulär steht, in eine Linie zusammen treffen? werde ich in diesem Anhange durch einige Beyspiele erweisen, daß man kaum eine Kegel- oder Cylinderfläche finden werde, bey der dieser Grund nicht statt finde.

2. I. Aufgabe. Den Berührungsplan eines Kegels zu bestimmen, dessen Grundfläche eine Ellipse ist; und auf eben diesen Plan eine Perpendikulärlinie zu errichten.

Auflösung. Man ziehe in der Grundfläche auf L eine Normale L*b*, und eine Tangente TL*r*. Ein Plan, der durch die Tangente LT, und durch die Spitze des Kegels V geht, wird den Kegel in der ganzen Seite VL berühren, folglich ist er der gesuchte Berührungsplan. Die Sache ist zu klar, als daß man einen Beweis fordern sollte. 49 Fig. VI Taf.

Man ziehe den Halbmesser CL, beschreibe mit dem Halbmesser *b*L auf der Grundfläche den Bogen *ba*; in der Fläche des Dreyeckes CVL den Bogen *ca*, und wenn man *b*V zieht, in dem Plane LV*b* den Bogen *cb*, so hat man ein bey *a* rechtwinklichtes Dreyeck *abc*, im welchen die Seite *ca* gefunden wird, wenn man setzet VC : CL = 1 : $cot.$ CLV; der Bogen *ab* ist = L*b*D — LCD = $\varphi - \alpha$; mithin steht in dem sphärischen Dreyecke 1 : $cos.\ ab = cos.\ ac : cos.\ bc$. Wenn man demnach aus *b* auf LV einen Perpendikel *b*H = L*b* × $sin.\ bc$ zieht, wird dieser auf den Plan VLT perpendikulär seyn.

Es ist einleuchtend, daß in dem Plane L*b*V alle Normalen aller Parallelschnitte liegen, die man in dem ganzen Kegel mit der Grundfläche machen kann, welche Normalen auf die Tangenten in der Seite LV perpendikulär sind. Es kömmt also nur darauf an, daß man die Neigung dieser Normalen selbst gegen die Seite LV

bestimme; es ist aber klar, daß diese Neigung der Winkel HbL sey, indem bH auf VL senkrecht steht; es muß also auch bH auf eine Tangente Hr, die mit LT parallel ist, und in dem nämlichen Plane VLT liegt, senkrecht stehn, folglich auf den ganzen Plan LVT. W. zuf. u. zu erw. w.

3. I. Zusatz. Alle Linien, die aus einem Punkte der Linie bV auf die Seite VL perpendikulär gezogen werden, sind auf den Berührungsplan VLT perpendikulär.

4. II. Zusatz. Alle Tangenten in H aller Kegelschnitte, die durch H gehen, liegen in dem Plane VLT, und sind auf Hb senkrecht, mithin treffen die Normalen derjenigen, derer Plan durch Hb geht, mit Hb ein.

5. II. Aufgabe. Auf der Oberfläche dieses Kegels werden zwey Punkte M, N gegeben, man verlangt den kürzesten Bogen, der zwischen diesen Punkten kann gezogen werden.

Auflösung. Man lasse aus M, und N auf die Grundfläche des Kegels die Perpendikel ME, NF fallen, ziehe durch E, F die Senne QEFR, welche man in zwey gleiche Theile schneide, und ziehe durch den Theilungspunkt aus C den Halbmesser der Ellipse CL. Auf L mache man die Tangente tLT, (die mit QR parallel seyn wird), und die Normale Lb; bestimme nach der I. Aufgabe die Linie bH, welche aus b auf den Berührungsplan VLT senkrecht gezogen wird. Auf der Grundfläche ziehe man Zbω mit QR parallel. Wenn man setzt EF : ME — NF = 1 : *tang.* λ, wird λ der Winkel seyn, den MN mit der Grundfläche macht. Man ziehe also Kb, daß der Winkel KbZ = λ werde, so wird Kb mit der Senne MN parallel, und zugleich auf bH perpendikulär. Gleichfalls mache man Ib auf bK senkrecht. Es ist einleuchtend, daß Kb auf den Plan der

Linien

Linien Hb, Ib perpendikulär stehe; wenn man also den Kegel mit einem Plane schneidet, der durch IbH; und mit einem andern, der durch KbH geht, werden erstens diese Plane einer auf den andern perpendikulär seyn; zweytens werden die Normalen der Kegelschnitte IH, KH mit bH eintreffen. Denn bH ist auf den Berührungsplan LVT senkrecht, mithin müßen die Tangenten in H beyder Kegelschnitte, die durch Hb gehen, auf Hb perpendikulär (II. Zusatz I. Aufgabe), und Hb ihre gemeinschaftliche Normale seyn. Man schneide nun den Kegel durch einen Plan MON, der mit KH parallel ist, wie auch durch einen andern SO mit IH parallel, und der eben durch X geht, allwo bV von MON geschnitten wird; so wird auch OX mit bH parallel, und die gemeinschaftliche Normale der Kegelschnitte MON, und SO seyn; aus welchem erhellet, daß MON der kürzeste Bogen zwischen M und N sey. Der Beweis bleibt von Wort zu Wort der nämliche, den wir in der V. Aufgabe angeführet haben. W. zuf. w.

6. Anmerkung. Wenn der Kegel schief auf seine Grundfläche steht, kann man allezeit einen auf die Achse senkrechten Durchschnitt machen, und die Gattung der Ellipse, die dieser Durchschnitt giebt, bestimmen; folglich kann man diese Ellipse für den Plan der Grundfläche annehmen, und die Auflösung verbleibt die nämliche. Eben dieses ist im Folgenden zu verstehen.

7. III. Aufgabe. Eben dieses in einem Kegelschnitte zu finden, dessen Grundfläche eine Parabel ist. (50 Fig. VI Taf.) 50 Fig. VI Taf.

Auflösung. Ich setze, die Achse gehe durch den Brennpunkt D, und sey auf die Grundfläche senkrecht. Aus den gegebenen Punkten M, N lasse man auf die Grundfläche die Perpendikel ME, NF fallen, ziehe durch E, F die Senne OEFR, theile diese in C gleich

ab, und ziehe durch C die Linie CL mit der Achse der Grundfläche parallel. Durch L ziehe man LT mit OR parallel, so wird tLT die Grundfläche in L berühren, und der Berührungsplan wird VLT seyn. Lb sey die Normale der Grundfläche in L. Aus L durch den Brennpunkt D ziehe man eine Linie, und beschreibe mit dem Halbmesser Lb aus L auf der Grundfläche den Bogen ba; auf dem Plane DLV den Bogen ac, und endlich auf dem Plane VbL den Bogen bc, so hat man ein bey a rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck abc, und da der Kegel gegeben ist, weiß man DL, Lb, und den Winkel bLa; und wenn man setzt VD : DL = 1 : *cotang.* ac, findet man ac, mithin steht 1 : *cos.* ab = *cos.* ac : *cos.* bc. Wenn man aus b auf die Seite VL den Perpendikel bH zieht, steht dieser auf den Berührungsplan VLT senkrecht.

Wenn man wiederum bK auf bH perpendikulär, und mit MN parallel; Ib aber auf bK senkrecht zieht, wird der Schnitt durch IbH auf jenen, der durch HbK geht, perpendikulär seyn, und sie werden eine gemeinschaftliche Normale Hb haben, folglich wird ein mit HK paralleler Schnitt, der durch MN geschieht, der kürzeste seyn ꝛc. Man ersieht, daß der Beweis der V. Aufgabe hier ohne geringste Aenderung angewendet wird.

8. I. **Anmerkung.** Aus der Auflösung erhellet, daß die Voraussetzung, daß die durch den Brennpunkt gehende Achse des Kegels auf die Grundfläche senkrecht stehe, keinen andern Vortheil verschaffe, als daß man ein bey a rechtwinklichtes Dreyeck abc bekomme. Wäre weder eines noch das andere, so müßte man den Brennpunkt D mit der Spitze des Kegels verbinden, und die Neigung des Plans LVD gegen die Grundfläche suchen, damit man den schiefen Winkel a des Dreyeckes abc bekäme, wenn man nicht den Kegel auf einen rechten nach

der

der vorigen Anmerkung (6) reducieren wollte. Die übrige Auflösung verbleibt unverändert.

9. II. Anmerkung. Man ersieht ohne Beschwerde, daß man eben also mit einem Kegel verfährt, dessen Grundfläche eine Hyperbel ist.

Einen Zweifel muß ich hier aus dem Wege räumen. Wenn die Grundfläche ABDEF (51 Fig. VI Taf.) eine Linie wäre, welche irgendwo einen Punkt D der widrigen Beugung hat, daß die Oberfläche des Kegels theils erhaben, theils hohl wäre, und würden die Punkte M, N also gegeben; daß zwischen ihnen der Punkt der widrigen Beugung läge, wie sollte man in diesem Falle den kürzesten Bogen finden, und den gewöhnlichen Beweis anwenden? Ich setze, der Punkt D in der Grundfläche sey von dieser Art, die gegebenen N, M in den Seiten VB, VE, die Achse des Kegels VC. Indem der Kegel gegeben wird, nehme ich an, man finde den Punkt der widrigen Beugung D. Man ziehe durch D die Tangente TDt, (die zugleich die Secante ist), und DV, wie auch DK auf tT in D perpendikulär. Es ist einleuchtend, daß die Oberfläche des Kegels ABDV convex, und der Theil DVF concav sey, mithin wenn der Kegel geschnitten wird, daß der Plan durch MN gehe, wird die Linie, die daraus entsteht, nothwendig in O, allwo sie durch DV geht, gleichfalls einen Punkt der widrigen Beugung haben. Eben also, wenn ein Plan, der auf MN senkrecht steht, den Kegel noch einmal schneidet, wird die Linie SOG in eben dem Punkte O eine widrige Beugung bekommen. Um aber diese Schnitte zu bestimmen, ziehe man aus was immer für einem Punkte K der Linie DK auf VD einen Perpendikel KH. Gleichfalls mache man nKm mit der Linie NM parallel, und auf KH senkrecht, wie auch fKg auf mn in K perpendikulär. Wenn der Kegel durch HnKm geschnitten

wird,

wird, und durch einen andern Plan, der durch *HfKg* geht, werden die durch diese zwey Schnitte gestalteten Linien eine gemeinschaftliche Normale HK haben, folglich auch wenn durch NM, SG zwey mit den vorigen parallele Schnitte gemacht werden, werden die Linien NOM, SOG in O eine gemeinschaftliche Normale OQ, die mit HK parallel ist, haben, und NOM wird der kürzeste Bogen seyn. Denn es ist klar, daß VDT der Berührungsplan des Kegels, und KH, OQ auf diesen Plan perpendikulär sey.

52 Fig. VI Taf. Der Beweis bleibt der nämliche. Man stelle sich vor (52 Fig. VI Taf.), MON, GOS, OQ seyen eben die Linien der vorigen Figur, TO*t* die Tangente in O der Linie MON. Man verlängere OQ gegen R, und lasse aus M darauf einen Perpendikel MR fallen. Wenn man aus R in dem Plane der Linie GOS auf OR einen andern Perpendikel RG zieht, wird dieser die Linie GOS irgendwo in G durchschneiden, und zugleich auf RM perpendikulär seyn, indem die Plane dieser Linien aufeinander senkrecht stehen. Man sieht, daß OR auf die Linie GOS perpendikulär, als die gemeinschaftliche Normale stehe, folglich ist RO der kürzeste Weg aus R auf den Umkreis der Linie GOS, folglich kürzer, denn RP, und der Bogen MO muß kleiner seyn als MP. Eben also ist QO auf SOG normal, und OQ der kürzeste Weg aus Q auf SOG, aus dem ist auch NO kleiner, als was immer für ein Bogen NP, der nicht durch O geht; die Linien MR, NQ verbleiben die nämlichen für alle Bögen, die von M zu N können gezogen werden. Und dieses zeigt, daß man den alten Beweis auch hier anwenden kann.

53 Fig. VI Taf. 10. IV. Aufgabe. Es werden in der Oberfläche eines Cylinders SDB*bfd* (53 Fig. VI Taf.) zwey Punkte

M, N

M, N gegeben, man verlangt den kürzesten Bogen zwischen ihnen.

Auflösung. Die Grundfläche des Cylinders sey zum Beyspiele eine Cissoide DSB, deren Gleichung $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$. Man ziehe aus M, N auf die Grundfläche die Perpendikel MA, NB, und die Senne AB. Es kömmt darauf an, daß man eine mit AB parallele Tangente TL finde, und die entsprechende Normale LP; hat man diese, so weiß man, daß TLl der Berührungsplan sey, und PL auf ihn senkrecht stehe, wenn es ein rechter Cylinder ist; wäre dieser schief, so müßte man ihn senkrecht auf seine Seiten schneiden, und einen rechten daraus machen. Ich setze, SP sey die Achse der Cissoide, BA die Senne; da mir diese gegeben wird, nehme ich ihre Verlängerung AF bis zur Achse, und die ganze BF als bekannt an, wie auch die Ordinate BE; daraus finde ich auch FE. Diese sey $= b$, BE $= c$. Da die Tangente TL mit BF parallel seyn muß, steht FE (b) : BE (c) = TR $\left(= \frac{ydx}{dy} = \frac{2ax - 2xx}{3a - 2x}\right)$: RL $\left(= \frac{x^2}{\sqrt{ax - xx}}\right)$; folglich wird $\frac{bx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{2ac - 2cx}{3a - 2x}$. Aus dieser Gleichung bekömmt man folgende Kubische $x^3 - 3ax^2 + \frac{3a^2(3b^2 + 4c^2)x}{4(b^2 + c^2)} - \frac{a^3c^2}{b^2 + c^2} = 0$, aus der man x = SR findet, wie auch RL $= y$. Dann zieht man LP auf TL perpendikulär, verlängert PL in u, macht uV mit der Seite des Cylinders Ll parallel; aus V, allwo MN

von

von uV geschnitten wird, zieht man VQ mit uLP parallel, und VQ wird irgendwo in O die Seite Ll durchschneiden: der Schnitt durch M, O, N wird die kürzeste Linie geben.

Man mache durch OQ noch einen Schnitt, der auf den Plan MNV senkrecht geht, so wird VO die gemeinschaftliche Normale der Linien MON, GOH seyn, und um zu zeigen, daß MON der kürzeste Bogen sey, gebraucht man den vorigen Beweis. W. zuf. w.

11. Anmerkung. Wenn in einem Cylinder die gegebenen Punkte eine Lage haben, wie in gegenwärtiger Aufgabe, hat die Auflösung nicht die geringste Schwierigkeit, vorausgesetzt, daß man eine mit der Senne parallele Tangente zu finden weiß. Ja wenn auch zwischen den gegebenen Punkten einer von einer widrigen Beugung läge, zum Beyspiele, wenn in der 51 Figur anstatt des Kegels ein Cylinder wäre, würde die Auflösung nicht schwerer, sondern um etwas erleichtert werden, indem in diesem Falle DK selbst auf VD perpendikulär wäre, und OQ mit DK parallel. Noch ein Beyspiel wollen wir anführen, wenn in einem cissoidalischen Cylinder die gegebenen Punkte nicht auf der nämlichen Seite des Cylinders liegen, sondern die Seite Ss, welche die Spitzen S, s beyder Grundflächen verbindet, entzwischen ist.

12. V. Aufgabe. Auf der Oberfläche eben dieses Cylinders liegt M auf der Seite Bb der Fläche $SsbB$; N aber auf der Seite Dd der Fläche $SsdD$; man begehrt einen Durchschnitt, MKN, daß die Summe der
54 Fig. VI Taf. Bögen MK + KN die kleinste sey. (54 Fig. VI Taf.)

Auflösung. SR, sr seyen die Achsen der Grundflächen BSD, bsd; man verlängere sie gegen die anderen Seite in P und p, und beschreibe um SP, sp gleiche Cissoiden ASα, $\delta s a$, also, daß nur der Durchmesser des

Cis-

Cirkels in der Gleichung $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, nämlich a negativ genommen werde. Man nehme den Bogen $S\alpha = sa$ mit $SD = sd$ gleich; ziehe die Senne BA, und $b\delta$, so hat man einen zusammengesetzten Cylinder $ABD\alpha a\delta d$, dessen Flächen $ASB s\delta$, $\alpha SD d s a$ hohl sind, und da alle Punkten der Bögen SB, SA in einer gleichen Entfernung von S eine gleiche Krümmung haben, auch von PSR in S gleich berührt werden, muß man den ganzen Bogen BSA als stettig und ununterbrochen ansehen. Eben dieses versteht sich von $bs\delta$, $DS\alpha$, dsa.

Wir wollen setzen, SD (oder SA) sey größer als SB, so muß AB bey genugsamer Verlängerung gegen B irgendwo die Achse SR schneiden, und man findet wie in der vorigen Aufgabe, eine Abscisse von S gegen P, der eine mit AB parallele Tangente entspricht. Der Berührungspunkt sey L, die Tangente TLt, und LV auf Tt perpendikulär. Man nehme $AH = DN = \alpha G$, ziehe Ll, HM, und Vu mit Ll parallel; aus u, wo HM von Vu durchschnitten wird, mache man uO mit VL parallel. Man schneide den Cylinder durch den Plan $HOMu$, so wird HOM der kürzeste Bogen zwischen H und M seyn. Zum gewöhnlichen Beweise darf man nur noch einen Schnitt durch $hOmu$ machen, der auf den Plan $HOMu$ senkrecht steht, und Ou wird mit ihren Normalen in O eintreffen. Endlich wird der Punkt K, allwo HOM durch Ss geht, leicht bestimmt, indem man nur SC auf SR senkrecht ziehen darf, und aus c, allwo Cc die Senne HM schneidet, eine mit CS parallele Linie. Nachdem K gefunden ist, schneidet man den Cylinder $dslBSD$ durch einen Plan, der durch N, K, M geht, so bekommt man die gesuchten Bögen NK, KM, derer Summe die kleinste ist aus allen, die durch N, M, und die Seite Ss gehen.

Man

Man stelle sich vor, der Cylinder $a\int\delta AS\alpha$ werde durch einen Plan geschnitten, der durch G, K, H gehe; es werde auch der Cylinder $a\alpha SDd\int a$ durch G, K, N geschnitten, so ist einleuchtend, daß die Linien GK, HK gleich, und ähnlich sind, indem $AH = \alpha G$, $SA = S\alpha$, $\int\delta = \int a$. Gleichfalls ist klar, daß die Linien GK, NK gleich und ähnlich sind, indem $\alpha G = DN$, $a\int = d\int$, $\alpha S = SD$; mithin muß auch der Bogen KOH dem Bogen KN gleich und ähnlich seyn. Nun aber haben wir dargethan, daß MKOH der kürzeste sey zwischen H und M; das ist, daß keine kleinere Summe der Bögen von M, durch $S\int$ zu H könne beschrieben werden; mithin (da H im Ansehen der Linie $\int S$ eben die Lage, welche N hat), ist auch MK + KN die kleinste Summe der Bögen, die aus M durch die Seite $\int S$ zu N können beschrieben werden. W. zuf. w.

13. Anmerkung. Wenn die Bögen SB, SD, oder $\int b$, $\int d$ gleich wären, würde der Punkt L auf S fallen, und LV, oder SV wäre auf die gemeinschaftliche Achse PSR der entgegengesetzten und gleichen Cissoiden perpendikulär, wie auch BA mit PR parallel, und die Auflösung würde um so viel leichter werden.

14. Damit wir den Anfängern die Bestimmung der Kegelschnitte, derer Bogen zwischen den gegebenen zwey Punkten der kürzeste ist, wenigstens für jene Kegel in etwas erleichtern, die zur Grundfläche einen apollonianischen Kegelschnitt haben, wollen wir noch ein Paar Aufgaben hieher setzen. Denn was jene Kegel betrifft, derer Grundfläche eine Ellipse ist, haben wir davon schon genugsamen Unterricht (Part. III. Geometr.) gegeben, und sind nur jene übrig, die zur Grundfläche entweder eine Parabel, oder eine Hyperbel haben.

15. VI. Aufgabe. Wenn ein Kegel $VdMB\gamma\delta$
55 Fig. VII Taf. (55 Fig. VII Taf.) dessen Grundfläche eine Parabel ist

nach

nach der Gleichung $y^2 - px = 0$, also geschnitten wird, daß der Plan INC irgendwo mit der verlängerten Achse der Grundfläche LBA in A zusammenstoße, auch VK, die aus V mit BL parallel gezogen wird, durchschneide, sucht man die Gattung des Durchschnittes CNI.

Auflösung. Ich setze, die Achse des Kegels stehe auf die Grundfläche $\delta B d$ senkrecht, und gehe durch den Brennpunkt D. Es sey CA $= b$, der Perpendikel aus C auf die Grundfläche, nämlich CE $= c$, VD $= a$, BH $= x$, die Ordinate MH auf die Hauptachse, $= y = \sqrt{px}$. Man ziehe HV, und aus P, allwo HV durch AI geht, lasse man auf AH den Perpendikel PF fallen; ziehe auch PT bis an die Achse VD mit HB parallel, und endlich PN mit HM gleichfalls parallel, so wird PN eine Ordinate, CP die entsprechende Abscisse des Schnittes CNI, (welchen ich auf den Plan BVHL senkrecht annehme) seyn. Man nenne CP $= z$, PN $= v$. Die ähnlichen Dreyecke ACE, APF geben

$$AC\ (b) : CE\ (c) = AP\ (b + z) : PF = \frac{c(b+z)}{b}.$$

Die gleichfalls ähnlichen Dreyecke VDH, PFH geben

$$VD\ (a) : DH\ \frac{(4x - p)}{4} = PF\ \left(\frac{c(b+z)}{b}\right) :$$

$$FH = \frac{(4x - p)c(b+z)}{4ab} = \frac{(4cx - cp)(b+z)}{4ab}.$$

Endlich steht aus den ähnlichen Dreyecken VDB, CEB auch

$$VD\ (a) : DB\ \left(\frac{p}{4}\right) = CE\ (c) : EB = \frac{cp}{4a}.$$

Wenn man BE und FH von BH $= x$ abzieht, bleibt

$$EF = x - \frac{cp}{4a} - \frac{(4cx - cp)(b + z)}{4ab}$$

 $= (4ax$

$$= \frac{(4ax - cp)b - (4cx - cp)(b+z)}{4ab} =$$

$\frac{4abx - 4bcx - 4czx + cpz}{4ab}$. Es steht aber auch

AC (b) : AE $\sqrt{(b^2 - c^2)}$ = CP (z) : EF =

$\frac{z\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$; mithin haben wir $\frac{4abx - 4bcx - 4czx + cpz}{4ab}$

$= \frac{z\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$, oder $4(ab - bc - cz)x = 4az \times$

$\sqrt{b^2 - c^2} - cpz$, und $x = \frac{4az\sqrt{b^2 - c^2} - cpz}{4(ab - bc - cz)}$.

Die Dreyecke VHM, VPN geben VH : VP = HM : PN. Da aber PT mit BH parallel, ist VH : VP = VD : VT, folglich VD (a) : VT $\left(VD - PF = a - \frac{c(b+z)}{b} = \frac{ab - bc - cz}{b}\right)$ = HM $(\sqrt{px})$:

PN $(= v)$. Diese Analogie giebt $\frac{abv}{ab - bc - cz} =$

$\sqrt{px}$, oder $\frac{a^2b^2v^2}{p(ab - bc - cz)^2} = x = \frac{4az\sqrt{b^2 - c^2} - cpz}{4(ab - bc - cz)}$,

mithin $\frac{a^2b^2v^2}{p(ab - bc - cz)} = \frac{(4a\sqrt{b^2 - c^2} - cp)z}{4}$,

oder endlich $4a^2b^2v^2 = (4ap\sqrt{b^2 - c^2} - cp^2)[(ab - bc)z - cz^2]$. Wenn wir setzen $v = 0$, wird $(4ab \times \sqrt{b^2 - c^2} - cp^2)[(ab - bc)z - cz^2] = 0$, folglich auch $(a - c)bz - cz^2 = 0$, oder $\frac{(a - c)b}{c} z = z^2$,

mit-

mithin hat man $z = 0$; und $z = \frac{b(a-c)}{c}$, das ist, in C und I sind die Ordinaten unendlich klein, und die Linie CNI ist eine Ellipse. Außer dieser Voraussetzung, daß AI die Linie VK schneide, kann der Kegelschnitt eine Hyperbel, oder eine Parabel seyn. W. z. f. w.

16. I. Zusatz. Wenn man sich vorstellet, beyde Aeste der Grundfläche werden bis in das Unendliche verlängert, und aus allen ihren Punkten auf V Linien, δV, dV ꝛc. gezogen, entsteht ein elliptoidischer Kegel. Die letzte Seite KV, die aus dem unendlich entfernten Punkte der Achse BL gezogen wird, wird mit BL parallel, und enthält mit der entgegengesetzten Seite BV den Winkel BVK; und aus jenem, was wir anderstwo (Part. III. Geometr.) erwiesen haben, muß ein mit der Seite VK paralleler Schnitt δBMd eine Parabel geben.

17. II. Zusatz. Wenn der schneidende Plan CNI die Achse der Grundfläche BL gegen L schneidet, muß seine Verlängerung gegen A die verlängerte Seite KVk des Kegels gegen k noch einmal schneiden; und da man durch die Verlängerung aller Seiten δV, γV, BV, aV, MV, dV ꝛc. einen gleichen, und bey der Spitze V entgegengesetzten Kegel gestalten kann, der von eben dem Plane geschnitten wird, muß eine Hyperbel entstehen.

18. III. Zusatz. Wenn man die (15) gefundene Gleichung auf v^2 ordiniert, und den Coefficienten des z^2 gleich 1 macht, kann man die Achse des Kegels VD $= a$ also bestimmen, daß der Durchschnitt CNI ein Cirkel werde, und man einen gemeinen Kegel mit einer cirkulären Grundfläche bekomme.

19. IV. Zusatz. Es läßt sich also gegenwärtige Aufgabe entweder auf die Hauptaufgabe, oder doch auf die II. dieses Anhanges reducieren, wenn man BV

mit VI gleich annimmt, und den Winkel BVI in zwey gleiche Theile durch eine neue Achse schneidet.

56 Fig. VII Taf. 20. VII. Aufgabe. Wenn ein Kegel, dessen Grundfläche (56 Fig. VII Taf.) OAM eine Hyperbel nach der Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ist, mit einem Plane $c\delta\mu a$ geschnitten wird, daß die Achse des Durchschnittes caG die Achse der Grundfläche in G schneide, die Gattung des Kegelschnittes zu bestimmen.

Auflösung. Bevor wir von dem Schnitte handeln, müßen wir den Kegel selbst etwas genauer betrachten. Wenn wir uns vorstellen, die Aeste der Grundfläche AO, AdM gehen bis in das Unendliche hinaus, und es werden aus allen ihren Punkten nach V Linien gezogen, so müßen jene, die aus den Punkten, in denen die Aeste an die Asymptoten stossen, (nämlich an ST, SR) gezogen werden, mit diesen parallel werden, wie zum Beyspiele HV, also, daß wenn VK mit AP parallel gemacht wird, der Winkel KVH = PST sey. Aus diesem ersieht man, daß die Seiten, die aus allen Punkten der Hyperbel MAO gezogen werden, keine wahre Kegelspitze bey V gestalten können. Allein da beyde Hyperbeln MAO, QBN nur einen einzigen Kegelschnitt ausmachen, gehört auch QBN einiger Maßen zum hyperbolischen Kegel. Denn sofern man aus allen Punkten des Astes BeQ die Seiten BVβ, eVε, QV$\varkappa$ rc. zieht, so wird jene, die aus dem Unendlichen, (allwo BeQ den Asymptot St berührt) kömmt, nämlich φVH, sich an die Fläche HVAdM, also zu sagen, anschließen, gleichwie auch ϱV auf der andern Seite die Kegelfläche ergänzet, da sie aus dem Unendlichen, das ist, aus dem Berührungspunkte des Astes BN mit dem Asymptote Sr, mit SR parallel gezogen wird. Und auf

diese

diese Art erhält man eine stettige Kegelfläche, welche auf die Spitze V zusammen läuft, also, daß die entgegengesetzten Seiten βV, AV den Winkel AVβ enthalten.

Man wird hier fragen, was die Seiten VQ, Ve, VB ꝛc., die aus den Punkten der Aeste QBN kommen, bey dem Kegel βVA zu thun haben? Ich antworte, diese Seiten gehören nicht zum Kegel βVA, sondern nur ihre Verlängerungen Vβ, Vε, V$\varkappa$ ꝛc., doch aber gestalten sie einen andern Kegel VQBN bis auf den Winkel $\Phi V \varrho = t S r$, den sie so zu sagen offen lassen; allein auch dieser Abgang einer wahren Kegelfläche wird durch die Verlängerungen der Seiten MV, bV, AV ꝛc. in B, D, A ꝛc. ergänzet, und wird durch sie eine wahre Spitze AVB gestaltet, deren entgegenstehende Seiten AV, BV einen gleichen Winkel mit βVA enthalten, und man bekömmt auf diese Art zwey bey der Spitze V entgegengesetzte Kegel βVA, AVB. Dieses vorausgesetzt, wollen wir den Schnitt $c\delta\mu a$ bestimmen.

21. Es ist klar, wenn man sich unendlich viele mit OAM parallele Durchschnitte des Kegels βVA vorstellet, als zum Beyspiele am, $\alpha\mu\nu$ ꝛc. die nichts anders, denn mit AdM ähnliche Hyperbeln seyn können, und man SV zieht, ihre halben Querachsen as, $\alpha\sigma$ ꝛc. immer abwachsen, nachdem sie der Spitze näher kommen, allwo sie verschwinden. In der Spitze selbst aber, allwo der Scheitelpunkt der Hyperbel mit ihrem Mittelpunkte eintrifft, wird die Hyperbel in ein geradlinichtes Dreyeck, (dessen eine Seite Vδ hier vorstellet) sich verwandeln. Von V an bis in c werden die Halbachsen der Hyperbeln wieder wachsen. Die Achse des Durchschnittes ac wird gleichfalls die Abscissen sp, $\sigma\pi$, VL ꝛc. dieser Hyperbeln in a, π, L ꝛc. durchschneiden, und wenn der schneidende Plan $c\delta\mu a$ auf den Plan PβVA perpendikulär steht,

können die Ordinaten des Durchschnittes keine andere seyn, als jene der ähnlichen Hyperbeln, durch welche der Schnitt geschieht; zum Beyspiele die Ordinate in μ des Durchschnittes $c\delta\mu a$ muß $\mu\pi$ seyn, nämlich der Hyperbel $\alpha\mu\nu$, deren Abscisse $\sigma\pi$, die halbe Querachse $\alpha\sigma$. Es ist also genug, wenn wir eine Gleichung für die Linie finden, deren Abscisse $a\pi$, und die entsprechende Ordinate $\pi\mu$ ist.

Größerer Bequemlichkeit wegen, indem alle diese Hyperbeln ähnlich sind, setzen wir die Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ gehöre für die Hyperbel am, durch deren Scheitelpunkt ac geht, denn ich nehme an, der Punkt a sey gegeben, wie auch die Neigung der Linie ca gegen PAS, folglich auch aL und VL. Es sey also $a\mathrm{L} = n$, $\mathrm{LV} = m$, $a\pi = z$, $\pi\mu = \nu$. Die ähnlichen Dreyecke aLV, $a\pi\alpha$ geben $a\mathrm{L}\ (n) : \mathrm{LV}\ (m) = a\pi\ (z) : \pi\alpha = \frac{mz}{n}$. Aus eben diesen Dreyecken hat man auch $a\mathrm{L} : \mathrm{L}\pi = \mathrm{V}a : \mathrm{V}\alpha = a\mathfrak{f} : \alpha\sigma$; mithin $\mathrm{L}a\ (n) : \mathrm{L}\pi\ (n - z) = a\mathfrak{f}\ (a) : \alpha\sigma = \frac{a(n-z)}{n}$; und da die Hyperbeln am, $\alpha\mu\nu$ ähnlich sind, wird auch die Hälfte der zweyten Achse der Hyperbel $= \frac{b(n-z)}{n}$ seyn. Aus diesem haben wir eine Gleichung eben dieser Hyperbel, nämlich $\pi\mu = \nu = \dfrac{\frac{b(n-z)}{n}}{\frac{a(n-z)}{n}} \times$

$$\sqrt{\left(\frac{mz}{n}\right) + \frac{a(n-z)}{n}\left(\frac{mz}{n}\right)} = \frac{b}{a} \times \sqrt{m^2z^2}$$

$$\sqrt{\frac{m^2z^2}{n^2}-\frac{amz^2}{n^2}+\frac{amnz}{nn}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{m(m-a)z^2}{n^2}+\frac{amnz}{n^2}}.$$

Es ist einleuchtend, daß wenn $m<a$, das erste Glied unter dem Radicale negativ sey, und die Gleichung eine Ellipse gebe. Ist aber $m>a$, wird es eine Hyperbel, da z^2 positiv ist. Endlich wenn $m=a$, hat man eine Parabel, indem dazumal $v=\frac{\sqrt{amz}}{\sqrt{n}}$. W. zuf. w.

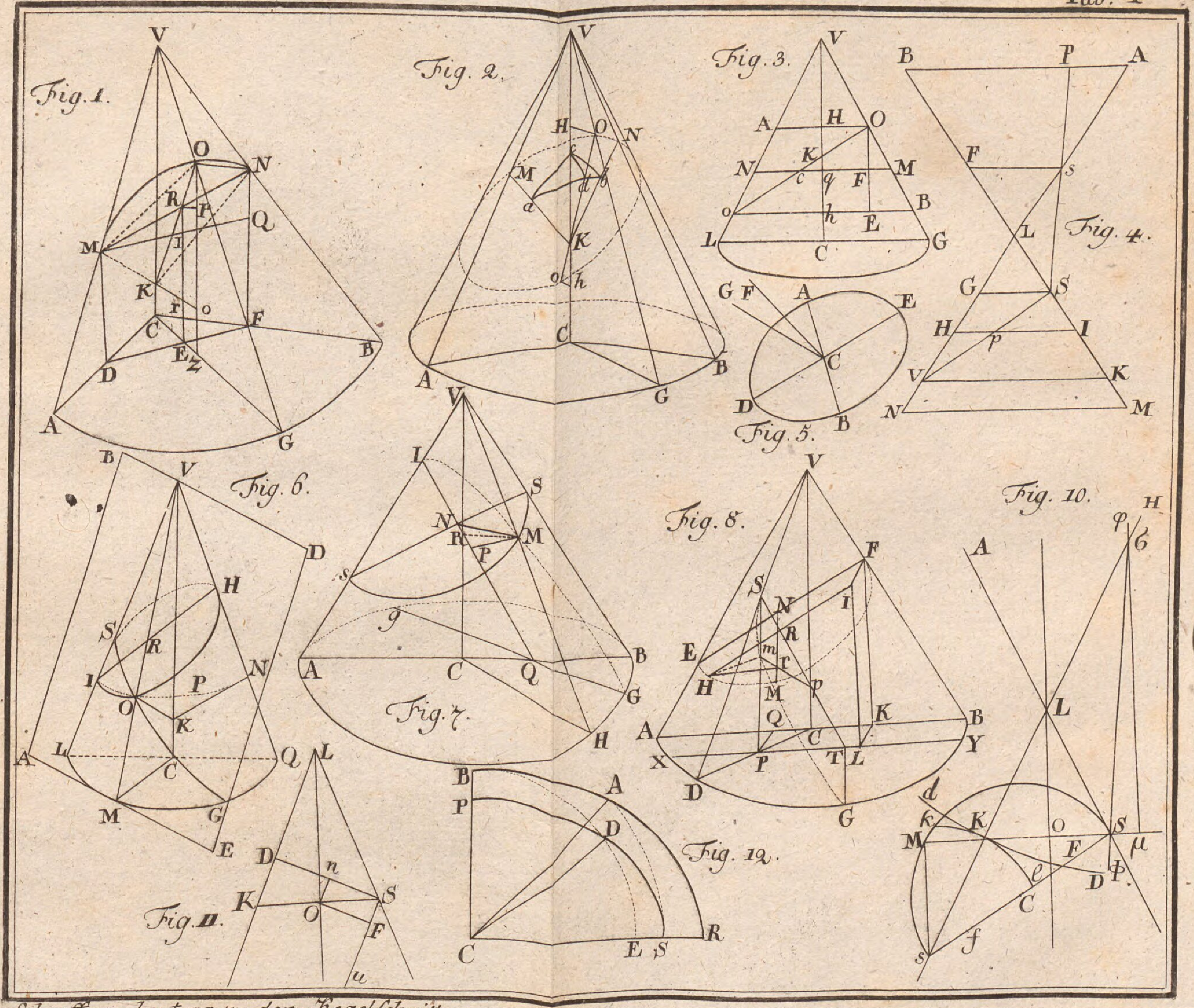
22. I. Zusatz. Wenn $a=m$ wird, oder $as=$ VL, (denn wir haben pam für die Grundfläche angenommen), wird al mit BVβ parallel. Ist aber VL, oder $m<a$, wird aL irgendwo in c die Seite βV des Kegels schneiden, gleichwie sie auch die Seite BV des entgegengesetzten Kegel AVB schneidet, wenn $m>a$, wie dieses alles mit jenem übereinstimmt, was man schon längst von den Kegelschnitten gewußt hat.

23. II. Zusatz. In der Anmerkung über die VI. Aufgabe (18. Beyträge zur Lehre rc.) haben wir gewiesen, wie man verschiedene Conoiden finden könne, derer Durchschnitt einen gegebenen Kegelschnitt gestalte. Wenn man den gegebenen Kegelschnitt als die Grundfläche annimmt, und darauf einen Kegel gestaltet, wie wir allhier in den letzten zwey Aufgaben gezeigt haben, erhält man auch verschiedene elliptoidische Kegel, welche der Aufgabe Genüge leisten: und wenn man will, kann man auch die Achse dieser Kegel VD (55 und 56 Figur VII Taf.) also bestimmen, daß CNI, $c\mu a$ ein Cirkel werde. (18. III. Zus.)

24. III. Zusatz. Endlich erhellet aus der Auflösung der letzten zwey Aufgaben, daß wir eigentlich zu reden in der Geometrie keine Kegel haben, die eine apollonianische Parabel oder Hyperbel zur Grundfläche

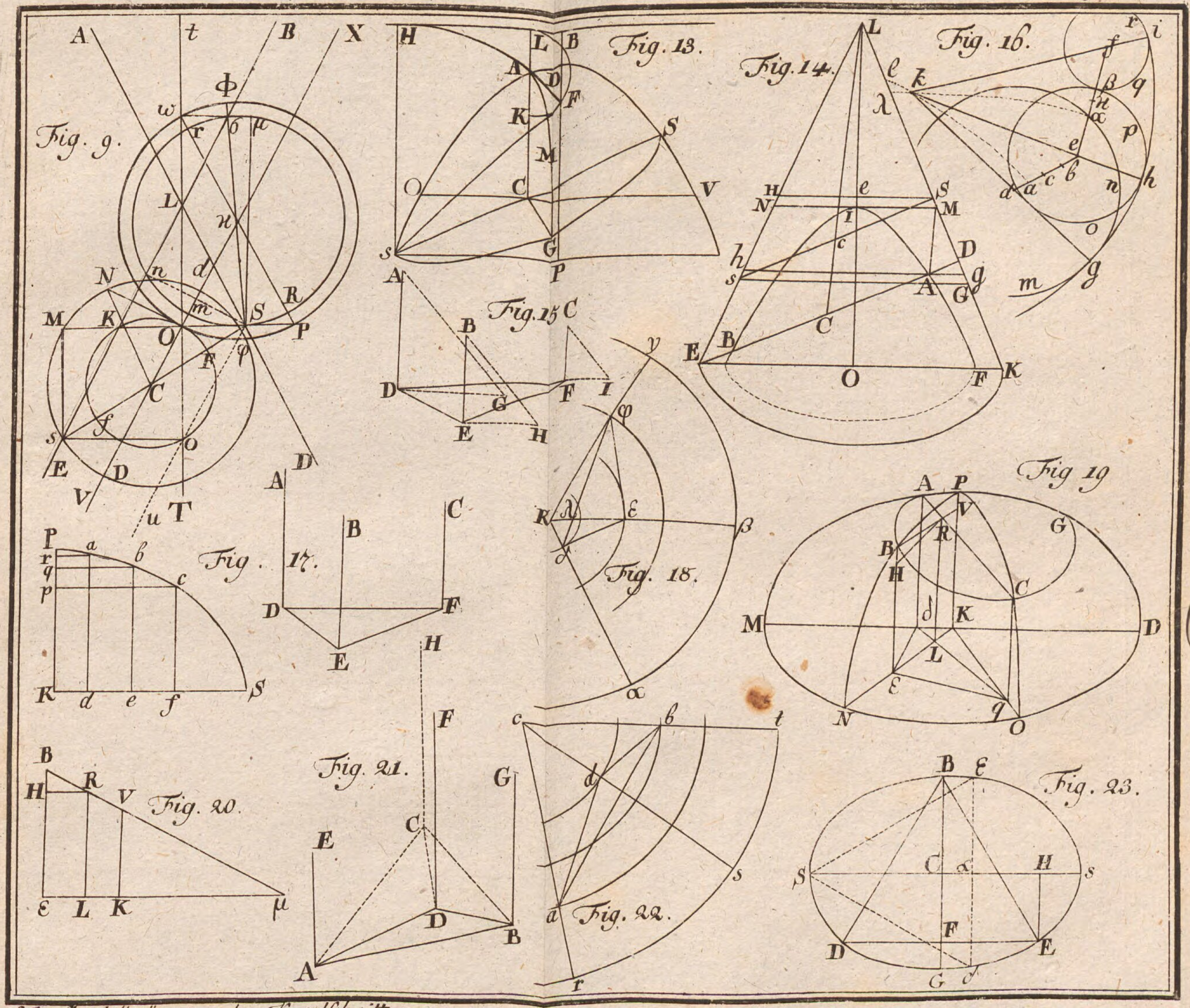
haben; denn jene, die wir uns gemeiniglich vorstellen, sind nur Theile wahrer elliptischer, oder gemeiner Kegel, die zur Grundfläche einen Cirkel haben. Was Parabeln und Hyperbeln, und insgemein Linien von höheren Ordnungen, die unendliche und asymptotische Aeste haben, betrifft, dieses würde den Stoff einer anderen Untersuchung geben, für die allhier der Ort nicht ist.

Tab. I



Scherffers beytrag zu den Kegelschnitt.

Tab. II.



Scherffers beyträg. zu den Kegelschnitt.

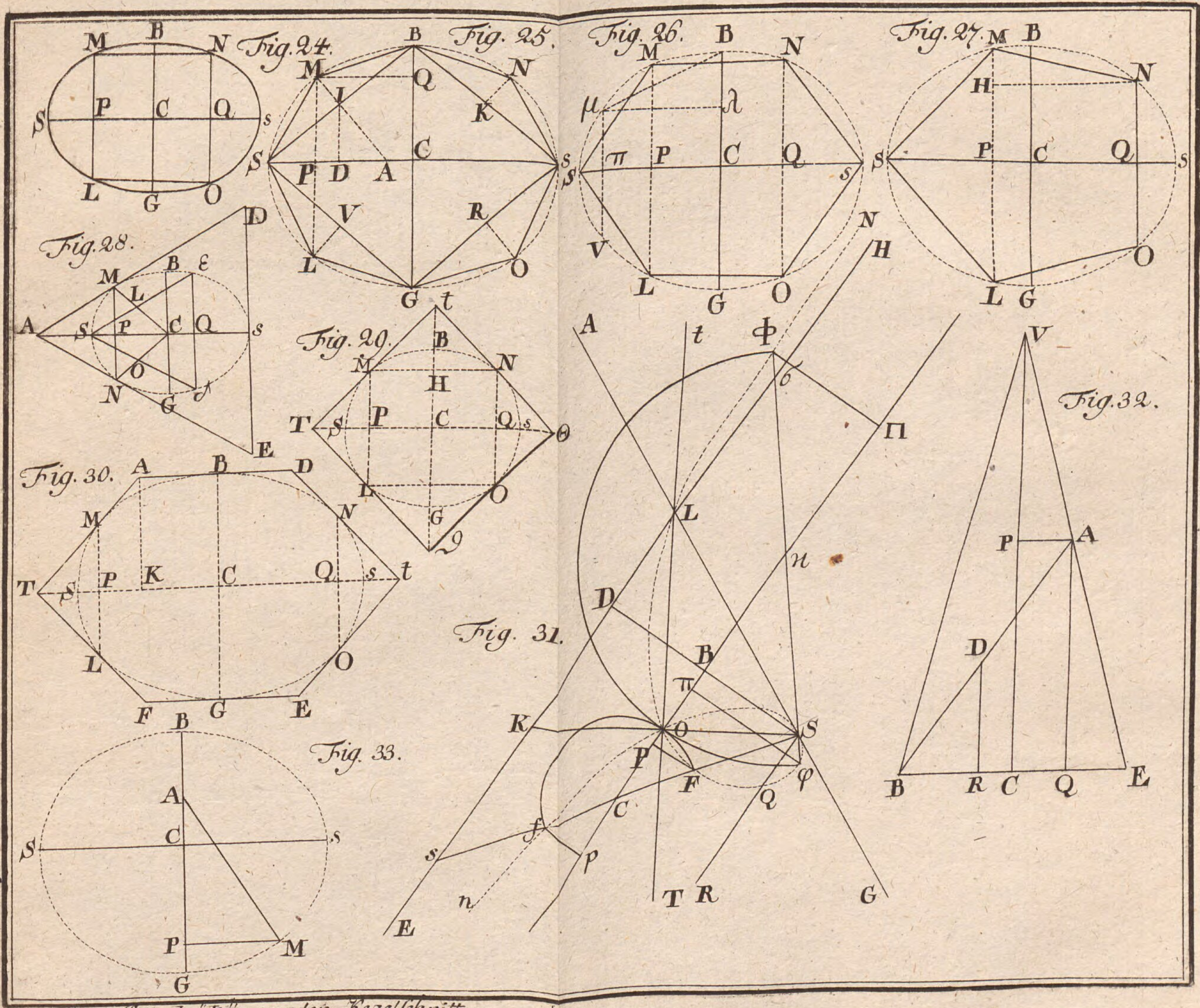
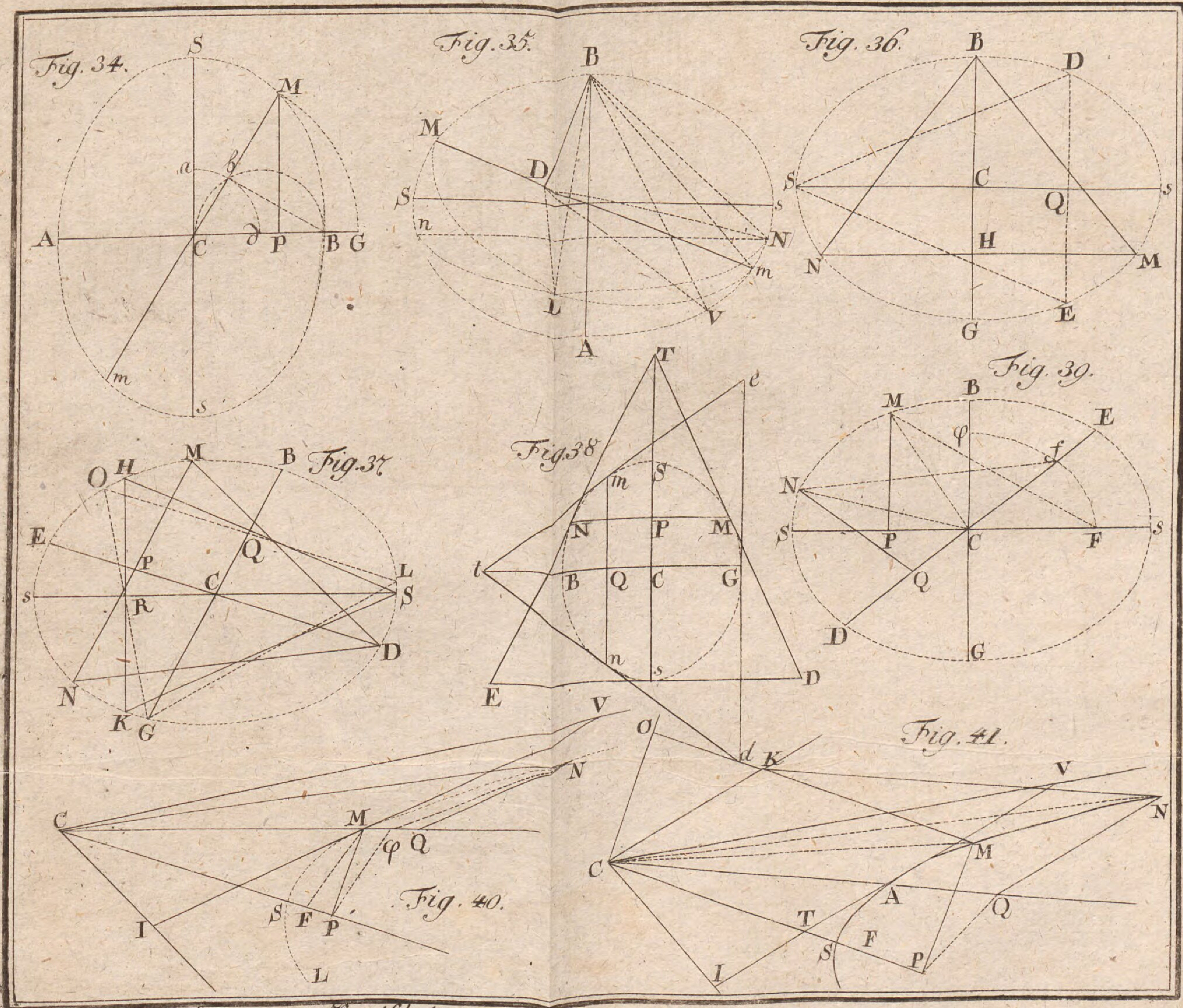
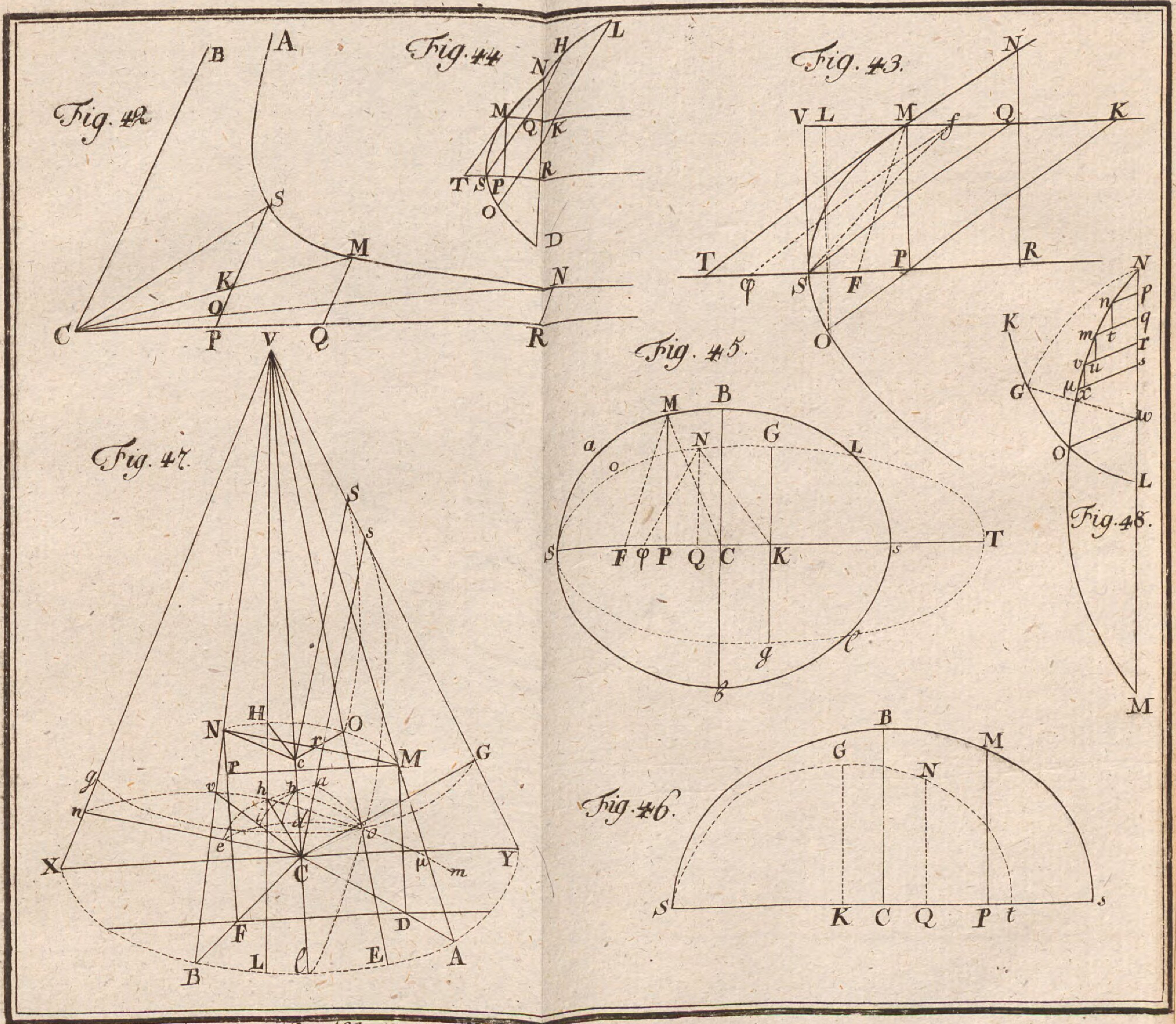


Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.

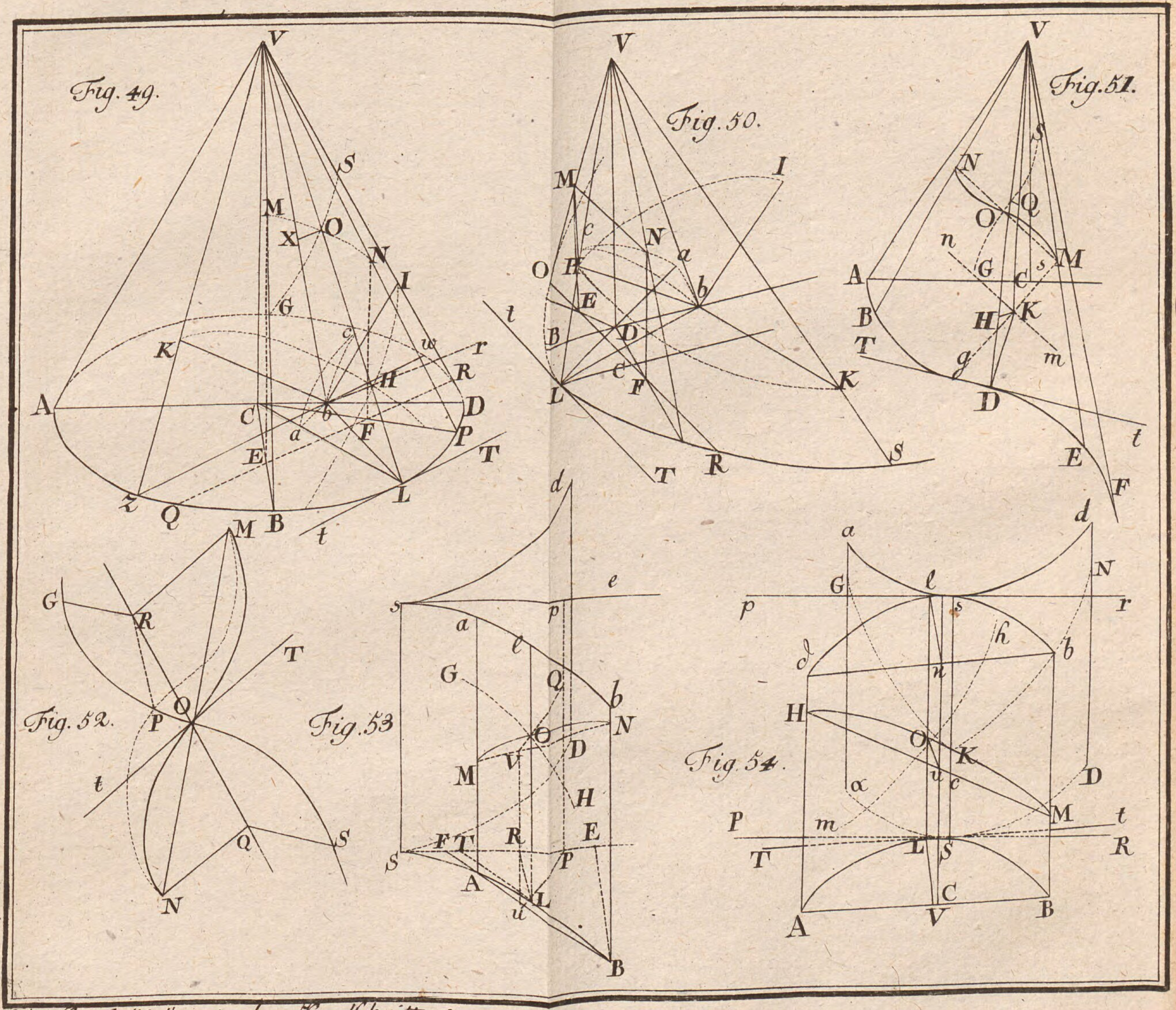
Tab. IV.



Scherffers beÿträg. zu den Kegelschnitt.



Scherffers beÿträg. zu den Kegelschnitt.



Scherffers beyträg. zu den Kegelschnitt.

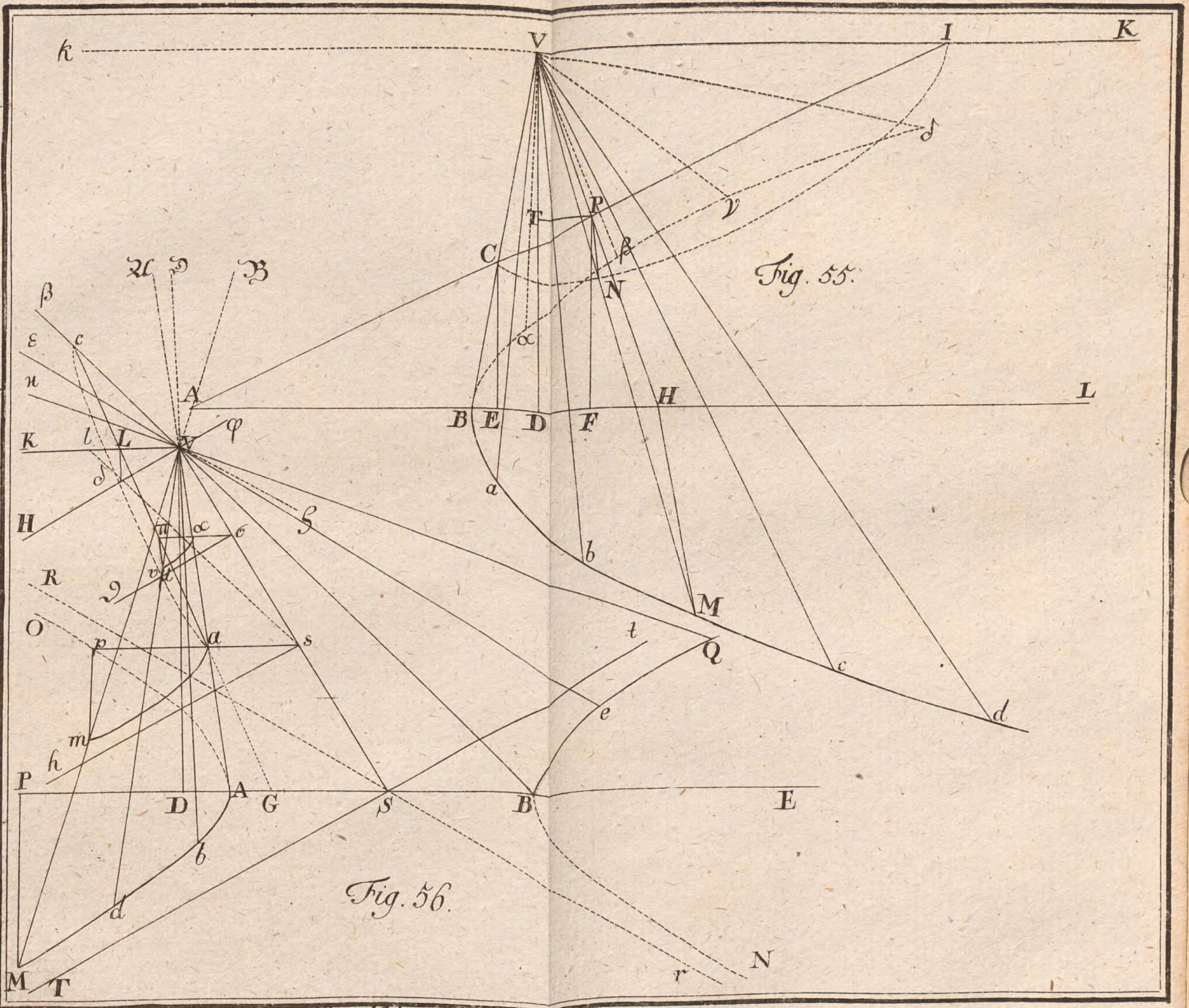


Fig. 55.

Fig. 56.

Scherffers beyträg. zu den Kegelschnitt.

III.

Pyramidometrie,

oder

verschiedene Fälle,

die in Ausmessungen vorkommen, und die Beyhülfe der sphärischen Trigonometrie erfordern, sammt Anmerkungen.

Vorbericht.

Die Gelegenheit zu diesem Aufsatze war eine algebraische Aufgabe über eine Pyramide. Als mich aber die Auflösung zu einer Gleichung des sechsten Grades führte, die wenig Anwendbares versprach, gab ich der Frage eine andere Wendung, und suchte, was für Theile in einer dreyseitigen Pyramide gegeben werden müßen, damit man alle übrige mit Beyhülfe der flachen und sphärischen Trigonometrie finden könne? Ich vermerkte also gleich, daß bey Ausmessungen sehr oft Fälle vorkommen können, bey welchen die sphärische Trigonometrie sehr gute Dienste thun kann, wenigstens wenn man sich die Mühe manche Entfernungen und Winkel auf dem Felde zu messen, ersparen, und lieber bey dem Schreibtische ein Paar sphärische Dreyecke zergliedern will, als die Meßkette, und das Astrolabium bey ungünstiger Witterung länger herumschleppen. Und aus diesem ersieht man schon, daß die ganze Abhandlung nur elementarisch, und für diejenigen brauchbar ausfallen muß, die sich mit dergleichen Ausmessungen abgeben.

Ich nenne alle diese trigonometrischen Berechnungen in dergleichen Fällen eine Pyramidometrie, weil die Spitzen der Dreyecke, die da vorkommen, in der That eine Pyramide vorstellen. Ich werde aber nur wenige Fälle anfüh-

führen, und einige Veränderungen, die in den gegebenen Theilen vorkommen können, beysetzen, wie auch die Ordnung, die man in der Auflösung der Dreyecke halten kann, hinzufügen, nicht zwar, als hielte ich sie für unumgänglich nothwendig, sondern als einen natürlichen Weg, der uns allmählig von den bekannten zu den unbekannten Größen führt.

Es ist eine sehr gewöhnliche Sache, daß einem in Behandlung eines Stoffes verschiedene Nebenaufgaben aufstossen, die zwar auf den Hauptzweck keine Beziehung haben, jedoch davon nicht ganz unabhängig sind, indem ihre Auflösung daraus ohne allen Zwang hergeleitet wird. Ich handelte von Pyramiden, und es fielen mir ein Paar nur geometrische Fragen bey, die ich noch niemals beantwortet gesehen habe. Eben die Vorstellung dieses geometrischen Körpers erinnerte mich an pyramidalische Keile, derer so viele und verschiedene Gattungen im Gebrauche sind; und dieses gab Gelegenheit zu einigen Anmerkungen über dieselben. Ich werde also in dem ersten Abschnitte die eigentliche Pyramidometrie, die bey Ausmessungen vorkömmt, wie ich gemeldet habe, vortragen. Der zweyte Paragraph wird allein geometrische Betrachtungen enthalten; und der dritte einige Anmerkungen über pyramidalische Keile.

§. I.

§. I.

Pyramidometrie,

oder von dem

Gebrauche der sphärischen Trigonometrie bey verschiedenen Ausmessungen.

I. Fall.

1. Auf einer Höhe bey D (1 Fig. I Taf.) sieht man drey in der Horizontalfläche liegende Stationen, A, B, C; man nimmt die Winkel CDA, BDA, CDB, unter welchen die drey Seiten des Dreyeckes ABC gesehen werden. In der Ebene aber nimmt man die Winkel CAB, DAC, und mißt die Seite AB. Aus diesem soll man AC, BC, AD, BD, CD; die Perpendikularhöhe DE, wie auch EA, EC, EB, und alle flachen Winkel der Pyramide, deren Grundfläche ABC, und die Spitze D ist, finden. 1 Fig. I Taf.

Auflösung. Man stelle sich vor, es werden auf den drey Flächen CDA, BDA, CDB mit einem beliebigen Halbmesser Da aus dem Mittelpunkte D drey Cirkelbögen *ac*, *ab*, *cb* beschrieben, welche ein sphärisches Dreyeck *abc* gestalten. Gleichfalls beschreibe man aus A auf den Flächen ADC, ACB, ADB, drey andere Bögen, so wird man ein zweytes sphärisches Dreyeck *def* erhalten.

Es ist klar, daß in dem sphärischen Dreyecke *abc*, in dem die Winkel CDA, BDA, CDB sind genommen worden, alle drey Seiten gegeben werden, und man

kann

kann also den Winkel *cab* finden, welcher eben der Winkel *edf* des zweyten sphärischen Dreyeckes seyn muß, indem sowohl *edf*, als *cab* die Neigung der Plane ADC, ADB mißt. Man hat demnach in dem sphärischen Dreyecke *edf* den Winkel *d*, und zwey Seiten *de* (oder den genommenen Winkel DAC), und *ef* = CAB, aus welchem man die Seite *df*, das ist, den Winkel DAB findet. Nun hat man in dem geradlinichten Dreyecke ADB die Winkel DAB, ADB, sammt der Seite AB, und findet DA, DB, wie auch DBA. Eben also sind in dem Dreyecke DAC die Winkel ADC, DAC, und die Seite DA bekannt, aus welchem man DC, AC, und DCA sucht. In dem Dreyecke CDB sind die Seiten DC, CB sammt dem enthaltenen Winkel nunmehr gegeben, und man findet die zwey übrigen Winkel, wie auch CB, welche man auch aus dem Winkel CAB, und den Seiten AB, AC suchen kann. Aus eben diesem findet man die Winkel ABC, ACB.

Aus dem sphärischen Dreyecke *edf* findet man den Winkel *dfe*, das ist, die Neigung des Plans ADB gegen die Horizontalfläche CAB. Man lasse aus D in der Fläche ADB auf AB einen Perpendikel DF fallen, und setze 1 : *sin.* DBF = DB : DF. Es ist einleuchtend, wenn man EF zieht, daß auch der Winkel DFE die Neigung des Plans ADB gegen den Horizont messe, folglich ist er mit dem gefundenen *dfe* gleich, und es steht 1 : *sin. dfe* = DF : DE; item DA : DE = 1 : *sin.* DAE, und 1 : *cos.* DAE = DA : EA. Eben also hat man DB : DE = 1 : *sin.* DBE, und 1 : *cos.* DBE = DB : BE; wie auch DC : DE = 1 : *sin.* DCE, und 1 : *cos.* DCE = DC : EC. Man hat demnach alles, was zu suchen war.

I. Ver-

2. I. Veränderung. (2 Fig. I Taf.) 2 Fig. I Taf.

Gegeben } wird { ED, DAE, DAB, und die drey flachen Winkel bey der Spitze D.
Gesucht } wird { AB, AC, BC, AD, CD, BD, AE, CE, BE.

Ordnung der Auflösung. Das △DEA giebt DA, EA. Das △ADB giebt DB, AB, DF, (es ist DF auf AB perpendikulär). Der Winkel DFE ist = Supplemente des *def*. Das △*def* giebt aus dem Winkel *d* = *cab*, der Seite *de*, und dem Winkel *e* die Seiten *df*, *ef*. Das △ADC giebt DC, AC. Die Seite BC wird aus dem △CDB, oder aus dem △BAC gesucht. Aus DE, AD, CD, BD werden AE, BE, CE gefunden.

3. II. Veränderung.

Gegeben } wird { DE, AC, DAC, und die drey flachen Winkel bey der Spitze D.
Gesucht } wird { AB, BC, DB, DC, DA, EB, EC, EA.

Ordnung der Auflösung. Dφ ist auf AC perpendikulär. Das △DAC giebt DA, DC, Dφ, DφE. DφE ist = *dfe*. Das △*cab* giebt *cab* = *edf*. Dann hat man in dem △*dfe* die Winkel *f*, *d*, und die Seite *df*, und findet *de*, *ef*. Das △DAB giebt DB, AB. Die Seite BC findet man entweder in dem △BDC, oder in dem △BAC.

4. III. Veränderung.

Gegeben } wird { BCA, DCB, DCE, DE, und die drey Winkel bey D.
Gesucht } wird { AB, BC, AC, DB, DC, DA, EB, EC, EA.

Ordnung der Auflösung. Das △DCE giebt DC, EC. Der Bogen $\varkappa\delta$ (= DCE) ist auf $\beta\delta\alpha$ senkrecht. Das rechtwinklichte △$\varkappa\delta\beta$, im welchen $\varkappa\delta$, $\varkappa\beta$ bekannt sind, giebt $\delta\beta$. Dann hat man in dem rechtwinklichten △$\varkappa\delta\alpha$ auch $\delta\alpha$, indem $\beta\alpha$ = BCA gegeben wird, und findet $\varkappa\alpha$ = DCA. Das △DCA giebt DA, AC: das

△CDB

ΔCDB aber DB, BC. Aus dem ΔADB findet man AD, oder auch aus dem ΔDCA.

5. IV. Veränderung.

Gegeben	wird	DAC, die ganze Grundfläche ABC, und die drey Winkel bey D.
Gesucht		DB, DC, DA, DE, EB, EC, EA.

Ordnung der Auflösung. Das ΔDAC giebt DA, DC, DCA. In dem $\Delta\alpha\varkappa\beta$ hat man $\alpha\varkappa\beta (= abc)$, $\varkappa\alpha$, $\alpha\beta$, und findet $\varkappa\beta$. Das ΔDCB giebt DB. In dem $\Delta\beta\varkappa\alpha$ sucht man den Perpendikulärbogen $\varkappa\delta$, der den Winkel DCE mißt; und da DC gefunden ist, sucht man auch DE, EC. Aus DB, und ED findet man EB; wie auch EA aus DE, und AD.

6. V. Veränderung.

Gegeben	wird	AD, AC, AB, und die drey Winkel bey D.
Gesucht		BC, DC, DB, DE, EC, EA.

Ordnung der Auflösung. Aus ADC, AD, AC findet man DC, DAC, DCA. Item aus AB, AD in dem ΔADB die Seite DB, und aus dem ΔBDC die Seite BC, wie auch den Winkel DCB. Aus den Seiten des ΔABC den Winkel BCA $= \alpha\beta$. In dem $\Delta\alpha\varkappa\beta$ den Perpendikulärbogen $\varkappa\delta =$ DCE. Dann in dem rechtwinklichten ΔCDE die Höhe DE, und EC. Aus DE, DB, DA die Linien EB, EA.

7. VI. Veränderung.

Gegeben	wird	AC, BC. EDA, EDC, EDB, welche die Complemente der Depressionswinkel der Stationen A, B, C unter dem scheinbaren Horizonte der Station D sind. Die drey Winkel bey der Spitze D.
Gesucht		DA, DC, DB, AB, DE, EB, EC, EA.

Ord-

Ordnung der Auflösung. Die $\triangle\triangle$DEA, DEC geben ED : DA = *cos.* EDA : 1
DC : ED = 1 : *cos.* EDC. Zusammengesetzt
DC : DA = *cos.* EDA : *cos.* EDC = *sin.* DAE : *sin.* DCE; mithin hat man in dem $\triangle$ADC die Seit AC, den Winkel ADC, und das Verhältniß der Seiten DC, DA, und findet (Probl. VIII. N. 144 Geom. Part. II.) diese Seiten selbst. Die rechtwinklichten Dreyecke DEA, DEC geben DE, EA, EC. Das $\triangle$DEB giebt DE.

Wenn EDA, EDC, nicht aber EDB gegeben werden, kann man DB aus dem $\triangle$DCB suchen, im welchen CDB, und die Seiten DC, DB bekannt sind; wie auch aus DB, DA, und dem Winkel DBA die Seite AB.

Bey dieser Auflösung kann man der sphärischen Trigonometrie entbehren.

8. VII. Veränderung (3 Fig. I Taf.) 3 Fig. 1 Taf.

Gegeben } wird { CD, BCD, CDB, ACD, ADB, ADC.
Gesucht } wird { CB, DB, AD, AB, AC, AE, EC, ED, EB.

Ordnung der Auflösung. Man setzt allhier, A sey ein erhabener Ort, dessen Perpendikulärhöhe AE; B, C, D liegen in der Horizontalfläche. Das $\triangle$BCD giebt die Seiten CB, BD. Das $\triangle$ADC die Seiten AC, AD. Das sphärische $\triangle$*acb* giebt den Winkel *acb* = *def*. In dem $\triangle$*def* ist der Winkel *def*, und die Seiten *ed*, *ef* bekannt, und man findet *df* = ACB. In dem $\triangle$ACB hat man ACB, AC, BC, und findet AB. Das Dreyeck *bac* giebt den Perpendikulärbogen *ao* = ADE, und da man schon AD hat, findet man AE, ED. Die rechtwinklichten $\triangle\triangle$CAE, BAE geben gleichfalls EC, EB.

9. I. Anmerkung. Diese Veränderungen habe ich nur als Beyspiele angeführt; es werden Zweifels ohne noch andere weit wichtigere vorkommen können. Ich wollte auch nicht, daß man die angeführte Ordnung der Auflösung für die bequemste halten sollte. Die Umstände werden die beste Auswahl zu treffen lehren.

10. II. Anmerkung. Die Auflösung des ersten Falles, und aller angezeigten Veränderungen hat nur seine Richtigkeit in der Voraussetzung, daß die Fläche des Dreyeckes ABC (1 und 2 Fig.), oder BCD (3 Fig.) eine horizontale Lage habe; sollte dieses nicht seyn, so müßte man auf eine etwas andere Art zu Werke gehen.

4 Fig. 1 Taf. Ich will setzen, es befinde sich der Punkt A (4 Fig. I Taf.) allein auf dem Horizonte, B und C haben die Perpendikulärhöhen BG, CH, daß also das Dreyeck ABC schief gegen den Horizont liege. In diesem Falle kann man zwar nach der Auflösung die Höhe der Pyramide DE über die Grundfläche ABC finden, nicht aber die Perpendikulärhöhe über den Horizont DZ. Wenn nebst den drey Winkeln bey der Spitze D die Winkel DAB (oder der Bogen $\beta\varkappa$) und BAC (oder der Bogen $\varkappa\delta$) sammt der Seite AC gegeben werden, sucht man DA, DC, DB, AB, BC und DE, wie gesagt worden. Man muß annoch die Winkel DAZ, BAG, oder CAH (ich setze hier BAG) nehmen; dann hat man aus der Seite DA, und dem Winkel DAZ die Höhe DZ, und AZ. Man stelle sich einen beliebigen Halbmesser Aα vor, der auf den Horizontalplan vertical stehe, und beschreibe mit demselben drey Quadranten; erstens $\alpha\mu$, der DA in β schneidet; zweytens $\alpha\varkappa\nu$, der durch BA bey $\varkappa$ geht; endlich $\alpha\delta\lambda$, der CA in δ durchschneidet. In dem sphärischen Dreyecke $\alpha\varkappa\beta$ hat man die Seiten $\alpha\beta$, $\alpha\varkappa$, und $\beta\varkappa$ (das Maaß des Winkels DAB), und findet den Winkel $\beta\alpha\varkappa$, oder den Bogen $\mu\nu$ in der Hori-

Horizontalfläche, das ist den Winkel ZAG. Da die Seite AB, und der Winkel BAG bekannt ist, giebt das rechtwinklichte Dreyeck BAG auch die Seiten AG, und BG. In dem Dreyecke AGZ hat man demnach zwey Seiten AZ, AG, und den enthaltenen Winkel, und findet ZG. Das rechtwinklichte Dreyeck DZG giebt DG, in dem die Seiten DZ, ZG schon bekannt sind. In dem sphärischen Dreyecke $\kappa\alpha\beta$ sucht man den Winkel $\alpha\kappa\beta$, und indem Dreyecke $\delta\beta\kappa$ den Winkel $\beta\kappa\delta$, und wenn man den vorigen von diesem abzieht, bleibt $\alpha\kappa\delta$ sammt den Seiten $\alpha\kappa$, $\kappa\delta$, in dem der Winkel BAC = $\kappa\delta$ genommen worden, mithin findet man in dem sphärischen Dreyecke $\alpha\kappa\delta$ die Seite $\alpha\delta$, deren Complement CAH, und den Winkel $\kappa\alpha\delta = \nu\lambda =$ GAH. Das rechtwinklichte Dreyeck ACH, nach gefundenen Winkel CAH, giebt AH, indem auch AC bekannt ist. Die Seiten AZ, AH, und der enthaltene Winkel ZAH $= \mu\nu + \nu\lambda$, geben in dem Dreyecke AZH die Seite ZH, aus welcher und DZ, man in dem Dreyecke DHZ auch DH findet. Gleichfalls findet man in dem Dreyecke GAH aus den Seiten GA, HA, und dem Winkel GAH $= \nu\lambda$ die Seite HG.

Die Winkel ADG, DAG, DGA; item HDG, DHG, DGH; wie auch ADH, DAH, DHA zu finden ist genug, daß man in jedem dieser Dreyecke alle drey Seiten hat, welches eben von den Winkeln AZG, AGZ des Dreyeckes ZAG, und von den Winkeln AGH, AHG des Dreyeckes AGH zu verstehen ist.

Wenn man die Figur auch nur mit einem flüchtigen Auge betrachtet, wird man mehrere Mittel finden zum Zwecke zu gelangen.

II. Fall. (5 Fig. I Taf.) 5 Fig. I Taf.

11. A, B, C sind drey auf verschiedenen Höhen liegende Stationen, die aus D in der Horizontalfläche

deutlich gesehen werden. Die Perpendikulärhöhen AF, CG sind schon vormals gemessen worden, und werden itzt gegeben. Man mißt auch den Winkel BAC, und aus D die Winkel ADB, ADC, BDC, ADF, CDG, BDE, und sucht nebst dem Dreyecke ABC auch die Perpendikulärhöhe BE, wie auch AD, BD, CD, FD, GD, ED.

Auflösung. Die rechtwinklichten Dreyecke AFD, CGD, geben aus den Seiten AF, CG, und den Winkeln ADF, CDG die Seiten AD, FD; CD, GD; dann hat man in dem Dreyecke CAD zwey Seiten CD, AD, und den enthaltenen Winkel CDA, um die Winkel ACD, CAD, und die Seite AC zu finden. Nun betrachte man das sphärische Dreyeck *cab*, dessen drey Seiten durch die Winkel CDA, ADB, BDC gegeben sind, und suche den Winkel *cab*, welcher dem Winkel *edf* eines andern sphärischen Dreyeckes gleich ist, wie ein jeder leicht bemerkt, so hat man in diesem letzteren *fd*, oder den Winkel CAD, die Seite *fe*, das ist, den Winkel CAB, und den Winkel *edf*, und sucht die Seite *ed*, welche den Winkel BAD mißt. In dem Dreyecke BAD ist demnach die Seite AD sammt den Winkeln BAD, ADB bekannt, und man findet ABD, AB, BD. Das rechtwinklichte Dreyeck BED giebt aus dem genommenen Winkel BDE, und der gefundenen Seite BD die Höhe BE, und die Seite ED. Endlich hat man in dem Dreyecke ABC zwey Seiten AC, AB, und den enthaltenen Winkel CAB um die Seite CB, und die übrigen Winkel zu finden.

12. Anmerkung. Wollte man auch das Dreyeck EFG in der Horizontalfläche bestimmen, so könnte man die Winkel ADB, ADC, BDC nach der Anweisung, die wir oben in der II. Anmerkung über den I. Fall gegeben haben, auf die Horizontale EDF, FDG, EDG redu-

reducieren, und indem schon die Seiten ED, FD, GD gefunden worden, kann es nicht schwer fallen, auch den Abstand der Punkte E, F, G voneinander zu finden.

13. I. Veränderung. (6 Fig. I Taf.) 6 Fig. I Taf.

Gegeben wird: BAD, CAD, BDC, ADC, ADB; ADZ, BAH, CAL, AZ.
Gesucht wird: AB, BC, AC, AD, BD, CD, NZ, ZV, VN, ND, ZD, VD.

Ordnung der Auflösung. Das rechtwinklichte △ ADZ giebt AD, ZD. Das △DAB giebt DB, AB. Aus dem △DAC findet man DC, AC. Aus dem △DBC die Seite BC. Das rechtwinklichte △AHB giebt BH, AH = ZV, und VB = AZ + BH. Aus dem △ACL sucht man CL, AL, und CN = AZ + CL. Die rechtwinklichten △△DBV, DCN geben VD, ND. Wenn man setzet

CB : BV — CN (oder CN — BV) = 1 : *sin.* X
1 : *cos.* X = CB : NV

findet man NV. Das Dreyeck *bca* giebt den Winkel *a* = *def*; und das △*def* die Seite *df*. Auf diese sey *eo* perpendikulär, so hat man DAO; dann setze man 1 : *sin.* DAO = AD : DO, so hat man den Perpendikel, der aus der Spitze D auf die Grundfläche der Pyramide fällt.

II. Veränderung.

14. Es wird angenommen, man habe eine Grundlinie DE, wie auch die Winkel VDE, VED vermittelst längerer Dioptern gemessen, und die Seite VD berechnet. Gleichfalls setzen wir, daß die Winkel VDZ, ZDN sammt DN, ZD bekannt sind.

Gegeben wird: VD, VDE, VED; DN, DZ, VDZ, ZDN, ADZ; ADC, ADB, CDB.
Gesucht wird: AD, BD, CD; BC, AC, AB; NZ, VZ, AZ; BV, CN.

Ordnung der Auflösung. Das △ADZ giebt AD, AZ. Das △*cab* giebt den auf *cb* gezogenen Perpendikulärbogen *ag*. Diesen verlängere man, bis er in *h* dem Mitwinkel des ADZ = *eo* gleich werde. Aus *h* werden die Bögen *hb*, *hc* beschrieben, und man hat zwey rechtwinklichte △△*ghb*, *ghc*, in denen die Seiten *gb*, *gh*; *gc*, *gh* bekannt sind, und sucht *hb* = ODB, *hc* = ODC. Aus dem vorigen weiß man, daß DO der auf die Fläche ABC fallende Perpendikel sey, den man aus dem △DAO findet. Und da OB, OC auf OD senkrecht stehen, geben die △△BOD, COD die Seiten BD, CD; und die △△ADB, ADC auch die Seiten AB, AC. CB findet man entweder aus dem △COB, oder aus dem △CDB.

Aus dem △ZDV findet man ZV = AH. Aus dem rechtwinklichten △ABH findet man BH, folglich BV = AZ + BH. Das △ZDN giebt NZ = AL, und das △ALC giebt CL sammt CN = AZ + CL. Die Seite VN wird aus dem △VDN gesucht.

7 Fig. I Taf. III. Fall. (7 Fig. I Taf.)

15. A, B, C, E sind vier Stationen, die aus der Anhöhe D können gesehen werden, und alle auf der Horizontalfläche liegen. Man nimmt die Winkel BAC, CAE, CBA, DBA, DAB, ADB, ADE, ADC, CDB, mißt auch AB, und sucht AE, EC, BC, AC, GD, AG, GE, GC, GB, AD, ED, CD, BD.

Auflösung. Aus dem Dreyecke ADB, im welchen AB, und die Winkel DAB, DBA gegeben sind, findet man DA, DB. Das sphärische Dreyeck *dgf* giebt die Seite *df*, in dem der Winkel *d* = *abc* aus dem Dreyecke *bac* gefunden wird, und die Seiten *dg*, *gf* bekannt sind, und man hat demnach in dem Dreyecke CDB die Winkel BDC, DBC, und die Seite DB, aus welchem man BC, DC sucht.

In dem Dreyecke ABC sind die Seiten AB, CB sammt den Winkeln ABC, BAC bekannt, und man findet die Seite AC. Gleichfalls weiß man in dem Dreyecke ADC die Seiten DA, AC, und den Winkel ADC, und sucht den Winkel DAC = *hm*.

In dem sphärischen Dreyecke *eac* sucht man den Winkel *cae*, der dem Winkel *lhm* gleich ist, und in diesem Dreyecke wird der Winkel *lhm* sammt den Seiten *hm*, *lm* gegeben, um *hl* = DAE zu finden; folglich kann man in dem Dreyecke AED aus den Winkeln DAE, ADE und der Seite DA, die Seiten AE, DE berechnen.

In dem Dreyecke ACE suche man den Winkel AEC = *pk*, indem alle Seiten und der Winkel CAE schon bekannt sind. Aus dem Dreyecke ADE weiß man den Winkel DEA = *np*, und aus den drey Seiten des Dreyeckes EDC sammt dem Winkel EDC findet man DEC = *nk*, daß also in dem sphärischen Dreyecke *pnk* alle Seiten gegeben sind. Man ziehe aus *n* auf *pk* einen Perpendikulärbogen *no*, und suche denselben, so steht 1 : *sin. no* = DE : DG; item 1 : *cos. no* = DE : GE. Also werden DG, GE gefunden. Die rechtwinklichten Dreyecke DGB, DGC, DGA geben GB, GC, GA, indem nebst GD auch DB, DC, DA schon bekannt sind.

16. I. Anmerkung. Dieser dritte Fall ist von dem ersten nur darinnen unterschieden, daß allhier die Grundfläche der Pyramide ABCE vierseitig ist. Und man kann leicht abnehmen, wenn noch eine Station auf der Horizontalfläche hinzukäme, wie diese mit in die Berechnung könnte gebracht werden.

17. II. Anmerkung. Ein gleiches Bewandtniß hat es mit dem II. Falle. Wir wollen setzen, die Pyramide ABCD (8 Fig. II Taf.) sey schon bestimmt; 8 Fig. II Taf.

man will aber auch einen vierten erhabenen Ort E verbinden, dessen Perpendikulärhöhe EM. Man kann aus A den Winkel EAD, wie auch EAB nehmen, und aus D den Winkel EDB, wie auch AED. Um die Höhe zu bestimmen kann entweder der Depressionswinkel, oder Erhöhungswinkel EAG aus A, oder der Verticalwinkel EDM aus D genommen werden. In dem Dreyecke ADE hat man die Winkel EAD, ADE, und findet AE, ED. Hat man den Winkel EAG, so findet man EG, und da AZ schon bekannt ist, auch EM. Aus EM, und ED erhält man MD. Hat man aber EDM genommen, so giebt das rechtwinklichte Dreyeck EMD wegen der gefundenen Seite ED auch EM, und MD.

18. III. Anmerkung. Von der Reduction der genommenen Winkel auf die Horizontalfläche vermittelst der sphärischen Dreyecke haben wir schon in der II. Anmerkung über den I. Fall einigen Gebrauch gemacht. Allein es ist noch eine andere Art übrig, die zugleich sehr bequem ist, den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Horizontalfläche mit einem schiefen Plane zu bestimmen, und ob sie schon sehr bekannt ist, so werden es doch die Anfänger uns zu Gute halten, wenn wir sie hier anführen. Es können drey verschiedene Fälle vorkommen.

9 Fig. II Taf. I. Man verlangt (9 Figur II Tafel) den Winkel BAC auf den Horizont DAE der Station A zu reducieren, wenn beyde Stationen B, C darüber erhaben sind, und der Winkel BAC gespitzt ist. Eben dieses versteht sich, wenn B und C unter dem Horizonte der Station A liegen.

Man verlängere den bekannten Bogen *bc* gegen die kleinere Höhe CE, bis $bf = 90^\circ$ werde, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke *fce* die Seiten *ce*, *cf*, und suchet *ef*, dessen Complement *ed* das Mauß des

Win-

Winkels *ead*, oder DAE ist. Es ist klar, daß BAC in dem Plane des Bogens *bcf* liegt. Wenn man also A*f*F zieht, muß dieses der Durchschnitt mit der Horizontalfläche seyn.

Wären die scheinbaren Höhen BD, CE, folglich auch die Bögen *bd*, *ce* gleich, so müßte man für *cf* das Complement der Hälfte des Bogens *bc* nehmen, und *fe* würde das Complement der Hälfte des Bogens *ed* seyn. Denn ein Perpendikulärbogen aus *a* auf *bc* gezogen würde sowohl *bc*, als *ed* gleich abtheilen.

II. Wenn der Winkel BAC (10 Fig. II Taf.) stumpf, oder $bc > 90^{\circ}$ ist, auch beyde Stationen B und C über, oder unter dem Horizonte der Station A liegen. 10 Fig. II Taf.

In diesem Falle sucht man aus den drey bekannten Seiten des Dreyeckes *cab* den Winkel *cab*, so hat man die Reduction, oder EAD. Um aber den Durchschnitt AF des Plans CAB mit dem Horizonte zu finden, suche man den Perpendikulärbogen *ao* auf *bc*, wie auch einen Theil, zum Beyspiele *ob*, und verlängere denselben, bis $obf = 90^{\circ}$ werde. Dann suche man in dem rechtwinklichten Dreyecke *bdf* aus den Seiten *bd*, *bf* die Seite *df*, so hat man den gesuchten Durchschnitt A*f*F.

III. Wenn die eine Station B über den Horizont der Station A, die andere C unter demselben ist. (11 Fig. II Taf.) 11 Fig. II Taf.

In dem Dreyecke *abc*, dessen drey Seiten bekannt sind, suche man die Winkel *cab*, *acb*; der erste giebt den Horizontalwinkel DAE. In dem rechtwinklichten Dreyecke *cef* hat man den Winkel *ecf*, und die Seite *ec*. Man findet demnach *ef*, und den Durchschnitt A*f*F des Plans BAC mit der Horizontalfläche DAE.

19. IV. Anmerkung. Die Reduction auf den Mittelpunkt der Winkel nehme ich als bekannt an. Nur in gewissen Fällen, von den ich mich nicht erinnere et-

was gelesen zu haben, (vielleicht weil sie bey großen Ausmessungen, wenn die Seiten der Dreyecke ein oder mehr tausend Klafter enthalten, unmerklich werden muß) kann ich sie nicht gänzlich umgehen. Ich setze (12 Fig. II Taf.) DE sey eine sehr mittelmäßige Höhe, bey der man die Höhe des Instruments AM = FE, mit welchem man die Winkel nimmt, nicht vernachläßigen kann. Man nimmt also gewöhnlicher Weise die Winkel DBA, DAB, DAF, und mißt die Seite MN = AB, sucht aus dem Dreyecke DAB die Seite DA, und aus dem rechtwinklichten Dreyecke DAF die Höhe DF, und wenn es verlangt wird, FA = EM; zu DF giebt man annoch die Höhe des Instruments AM = FE hinzu. Und dieses ist genug, so fern man nur allein DE sucht. Sollte man aber zu noch weiterer Berechnung nicht des Dreyeckes ADB, sondern des MDN vonnöthen haben, so ist klar, daß nicht allein die Seiten DA, DB, sondern auch alle drey Winkel einer Correction bedürfen. Denn es steht

12 Fig. II Taf.

DF : FA = 1 : *cot.* DAF

FA oder EM : DE = *cot.* DME : 1.

Zusammengesetzt DF : DE = *cot.* DME : *cot.* DAF = *tang.* DAF : *tang.* DME; und es versteht sich schon, daß man DM erhält, wenn man setzet *sin.* DME : 1 = DE : DM. Eben diese Correction ist bey dem Winkel DBF, und der Seite DB zu machen.

Nun stelle man sich vor, in dem Verticalplane DAME werde aus A der Bogen ac, aus M der Bogen $\alpha\varkappa$ beschrieben, wie auch in dem Plane FAB der Bogen ab, und in dem Plane EMN der Bogen $\alpha\beta$. Endlich beschreibe man die Bögen cb aus A, und $\varkappa\beta$ aus M, so hat man zwey sphärische Dreyecke acb, $\varkappa\alpha\beta$, und es steht $1 : \cos. ab = \cos. ac : \cos. bc$

$\cos. \alpha\beta : 1 = \cos. \varkappa\beta : \cos. \alpha\varkappa$

zusam-

zusammengesetzt (in dem $ab = \alpha\beta$) findet man $1 : 1 = cos. ac \times cos. \varkappa\beta : cos. bc \times cos. \alpha\varkappa$, und $cos. ac : cos. \alpha\varkappa = cos. bc : cos. \varkappa\beta$. Zuvor haben wir gefunden $DF : DE = tang. DAF \left(= tang. ac = \frac{sin. ac}{cos. ac}\right) : tang. DME \left(= tang. \alpha\varkappa = \frac{sin. \alpha\varkappa}{cos. \alpha\varkappa}\right)$, das ist $DF : DE = \frac{sin. ac}{cos. ac} : \frac{sin. \alpha\varkappa}{cos. \alpha\varkappa}$, oder $cos. ac : cos\, \alpha\varkappa = \frac{sin. ac}{DF} : \frac{sin. \alpha\varkappa}{DE}$; und es wird demnach $\frac{sin. ac}{DF} : \frac{sin. \alpha\varkappa}{DE} = cos. bc : cos. \beta\varkappa$.

Die Winkel also zu verbessern kömmt es auf zwey Analogien an, nämlich

$DF : DE = tang. DAF : tang. DME$

und $sin. DAF \times DE : sin. DME \times DF = cos. DAB : cos. DMN$.

Eben so verfährt man mit dem Winkel DBA. Sind die Winkel DAB, DBA corrigiert, so hat man auch den dritten MDN.

20. Wenn AM gegen DE nicht gar zu beträchtlich ist, kann man diese Correctionen ohne Bedenken durch folgende Formeln ausdrücken, die ich hier ohne Beweis hersetze, welchen ein jeder, der in dergleichen Messungen mittelmäßig geübt ist, leicht finden wird, wenn er auf die Verlängerung der Seite DA aus M einen Perpendikel zieht. Es bedeutet aber m'' die Länge des Halbmessers eines Cirkels auf Secunden reduciert, nämlich $57^\circ 17' 44'',8 = 206264'',8$, dessen Logarithmus $= 5,3144251$.

Cor-

Correction der Seite DA $= + AM \times \mathit{sin.}\ ac =$
$AM \times \mathit{sin.}\ DAF$

Correction des Bogens ac, oder des Winkels DAF $=$

$$\frac{+ m'' \times AM \times \mathit{cos.}\ ac}{AD + AM \times \mathit{sin.}\ ac}.$$

Correction des Bogens cb, oder des Winkels DAB $=$

$$\frac{+ m'' \times AM \times \mathit{cos.}\ ac \times \mathit{cos.}\ c}{AD + AM \times \mathit{sin.}\ ac}.$$

Da nun $\mathit{cos.}\ c = \frac{\mathit{tang.}\ ac}{\mathit{tang.}\ bc}$, ist die Correction des Winkels DAF zur Correction des Winkels DAB, wie hingegen die Tangente des Winkels DAB zur Tangente des Winkels DAF.

In einem Beyspiele, bey dem ich AB = MN = 1800 Schuh, BAF = 36°, DAB = 68°, DBA = 53° annahm, die Höhe des Auges AM aber = 4, fand ich FD = 985,75, DA = 1677,086; die Correction der Seite DA = 2,351; die Correction des Winkels DAF = 6′,37″; des Winkels DAB aber = 1′ 56″; daß also nach diesen Formeln DE = 989,75 Schuh; DM = 1679,437; DME = 36° 6′ 37″, DMN = 68° 1′ 56″. Nach den oben angeführten Analogien fand ich eben diese Winkel; nur in der Seite DM war ein Unterschied, der 0,003 eines Schuhes betrug. Und aus diesem ersieht man, daß bey mittelmäßigen Größen diese Formeln einen richtigen Gebrauch haben können.

§. II.

§. II.

Einige geometrische Anmerkungen über die Pyramide.

21. Als ich dasjenige niederschrieb, was ich in der Pyramidometrie einigen Nutzen zu haben glaubte, fielen mir verschiedene geometrische Anmerkungen bey. Unter andern auch die Frage, ob man um eine jede dreyseitige Pyramide eine Sphäre, und in einer jeden dergleichen Pyramide eine Sphäre beschreiben könne, die ihre vier Flächen berühre, gleichwie sowohl um = als in einem jeden geradlinichten, oder sphärischen Dreyecke ein Cirkel beschrieben wird. Ich weiß wohl, daß eine algebraische Auflösung ohne große Beschwerde könne angebracht werden; da mir aber für den zweyten Theil der Aufgabe die sphärische Trigonometrie einen sehr bequemen Weg darboth, welcher zu einigen Anmerkungen über die körperlichen Winkel Anlaß gab, verhoffte ich, meine Leser werden es mir zu Gute halten, wenn ich ihnen auch diese geometrische Betrachtungen lieferte.

22. I. Aufgabe. Um eine gegebene dreyseitige Pyramide ABCD (13 Fig. III Taf.) eine Sphäre zu beschreiben. 13 Fig. III Taf.

Auflösung. Man erhält diese, wenn man den Mittelpunkt, und den Halbmesser der Sphäre findet. Man beschreibe zum Beyspiele um die Grundfläche ABC einen Cirkel, da man nämlich gewöhnlicher Weise zwey Seiten AB, BC bey *a* und *b* gleich abtheilet, und vermittelst der in *e* sich schneidenden Perpendikel *ae*, *be* den Mittelpunkt sucht. Aus diesem errichte man auf die Fläche des Cirkels eine Perpendikulärlinie *em*. Eben also beschreibe man um die Fläche ADB einen Cirkel, und ziehe auf dessen Fläche aus dem Mittelpunkte *c*

einen

einen Perpendikel *cn*, der den vorigen nothwendig irgendwo in *o* schneidet, welcher Punkt der Mittelpunkt der Sphäre seyn muß, indem sowohl *em*, als *cn* Achsen der Sphäre sind, und durch den Mittelpunkt der Sphäre gehen müßen; da sie nur den Punkt *o* gemein haben, muß eben dieser der gesuchte seyn.

Der Halbmesser der Sphäre ist demnach A*o*. Denn aus der Vorrichtung ist $Ac^2 = Ad^2 + dc^2$, folglich $Ao^2 = Ad^2 + dc^2 + co^2 = dD^2 + dc^2 + co^2$. Es wären aber auch, wenn man aus *o* auf D eine Linie zöge, $oD^2 = Dc^2 + co^2 = cd^2 + dD^2 + co^2$, folglich $Ao^2 = Do^2$. Gleichfalls wenn B mit *e* und *o* verbunden würde, hätte man $Bo^2 = Be^2 + eo^2 = Ba^2 + ae^2 + eo^2 = Aa^2 + ae^2 + eo^2 = Ao^2$; mithin (da eben dieses von C zu verstehen ist,) $Do = Ao = Co = Bo$. W. zuf. w.

Anmerkung. Wenn man mit der geometrischen Bestimmung des Mittelpunktes *o* und des Halbmessers A*o* nicht vergnügt wäre, könnte man aus der gegebenen Pyramide den Winkel suchen, den die Plane ABC, DAB enthalten, das ist *cae*. In dem Dreyecke *cae* hätte man demnach nebst diesen Winkel auch die Seiten *ac*, *ae*, und fände *ce*, *ace*, *aec*. In dem Dreyecke *coe* wären *oce*, *ceo* (die Complemente der *ace*, *aec*) *coe* (das Supplement des *cae*) sammt *ce* bekannt, und man fände *eo*, *co*, mithin auch $Ao = \sqrt{Aa^2 + ae^2 + eo^2}$.

14 Fig. III Taf. 23. I. Satz. Wenn aus A, B, C (14 Fig. III Taf.) als so vielen Mittelpunkten drey sphärische Dreyecke *abc*, *αβκ*, 𝔄𝔅ℭ beschrieben werden, und derselben Winkel durch die Bögen *a*E, *b*E, *c*E; *α*F, *β*F, *κ*F; 𝔄𝔈, 𝔅𝔈, ℭ𝔈 in gleiche Theile abgetheilet werden, auch durch die Punkte E, F, 𝔈 aus A, B, C Linien gezogen wer-

werden, werden sich diese in dem nämlichen Punkte O schneiden.

Beweis. Ich setze hier zum voraus, daß die drey Bögen, welche in einem sphärischen Dreyecke die drey Winkel gleich abtheilen, sich in einem nämlichen Punkte schneiden. (Geom. Sphær. N. 129.) Da nun die Winkel *acb*, *aκβ*, derer ein jeder die Neigung des Planes DAB gegen den Plan BCA mißt, gleich sind, mithin auch derselben Hälften E*cb*, Fκβ, liegen nothwendig die Linien AO, BO in dem nämlichen Plane, im welchen die Bögen *c*E, κF beschrieben sind, mithin müßen sie irgendwo aufeinander stossen, zum Beyspiele in O. Aus eben der Ursache liegen die Linien BO, CO in dem Plane der Bögen Fβ, EB, der den Neigungswinkel des Plans DBC gegen ABC gleich abtheilet, und müssen sich demnach in einem Punkte schneiden. Aus diesem ersieht man, daß BO sowohl die Linie AO, als die CO schneiden müße. Da aber die Linien AO, CO in dem Plane AOC liegen, welcher vom AOB unterschieden ist, in dem sich BO befindet, kann BO auf den Plan AOB nur in einem einzigen Punkte stossen, und da sie doch beyde Linien AO, CO schneidet, muß nothwendig dieser Punkt derjenige seyn, im welchen AO von CO durchschnitten wird. W. zu erw. w.

24. I. Zusatz. Wenn aus der vierten Ecke der Pyramide ein sphärisches Dreyeck *νμπ* beschrieben, und die Winkel durch die Bögen *νλ*, *μλ*, *πλ* gleich abgetheilt werden, muß eben die Linie D*λ* durch O gehen, indem DO sich so wohl in dem Plane BDO, als im DOC befindet.

25. II. Zusatz. In der angeführten Geom. Sphær. wird erwiesen, daß die Punkte E, F, E, *λ* die Mittelpunkte der Cirkel sind, die in den sphärischen Dreyecken können beschrieben werden, indem die drey Perpendikel, die

die aus E auf die Seiten des Dreyeckes *abc* fallen, gleich sind. Wenn also durch die Mittelpunkte der Cirkel, welche in den vier sphärischen Dreyecken beschrieben werden, aus den vier Ecken der Pyramide vier Linien gezogen werden, müßen sich diese in dem nämlichen Punkte schneiden.

26. II. Satz. Wenn man aus dem besagten Punkte O auf die vier Flächen der Pyramide eben so viele Perpendikel fallen läßt, werden diese gleich seyn.

Beweis. Man lasse aus F auf die Seiten des Dreyeckes $\alpha\beta\varkappa$ die Perpendikulärbögen FT, FK, FH fallen, welche einander nach dem II. Zusatze (25) gleich sind; und ziehe aus B durch T, K, H die Linien BL, BQ, BN. Auf diese mache man OL, OQ, ON senkrecht. Indem die Fläche BFT auf die Fläche BDC senkrecht steht, ist es einleuchtend, daß OL auf die Fläche BDC perpendikulär ist. Eben also muß OQ auf ABC senkrecht stehn, indem OQ sich in dem Plane BFK befindet, der auf ABC perpendikulär ist. Endlich kann ON auf den Plan BDA nicht anderst, als perpendikulär seyn, als welche in dem Plane BFH liegt, der auf BDA senkrecht steht. Dieses vorgemerkt, steht

$$1 : \sin.\ FT = BO : OL$$
$$1 : \sin.\ FK = BO : QO$$
$$1 : \sin.\ FH = BO : ON$$

Es ist aber $\sin.\ FT = \sin.\ FK = \sin.\ FH$, folglich auch $OL = OQ = ON$.

Wenn man aus E gleichfalls die Perpendikulärbögen EJ, EL auf die Seiten AB, AC, und aus C die Linien CJL, CLM zieht, und auf dieselben die Perpendikel OL, OM fallen läßt, muß erstens OL der nämliche seyn, der aus O auf die Linie BL fällt, indem aus einem Punkte O auf den nämlichen Plan nur eine Perpendikulärlinie kann gezogen werden. Zweytens wird

OL

OL = OM, da nämlich EJ = EL, und 1 : *sin.* EJ = OC : OL, wie auch 1 : *sin.* EL = OC : OM, folglich OL = OM; es ist aber erwiesen worden, daß OL = ON = OQ, mithin ist auch OL = ON = OM = OQ. W. zu erw. w.

27. I. Zusatz. Man kann also mit dem Halbmesser OL = ON ꝛc. eine Sphäre beschreiben, welche in L, M, N, Q die vier Flächen der Pyramide berühre.

28. II. Zusatz. Der Mittelpunkt dieser Sphäre kann aus zwey Dreyecken *abc*, *αβκ* bestimmt werden, wenn man die Bögen *c*E, EI; *κ*F, FK sucht, und aus dem geradlinichten Dreyecke BOA die Seiten BO, OA findet. Die Berührungspunkte Q, M, L, N kann man aus den Dreyecken BQC, BLD ꝛc. bestimmen.

29. III. Satz. Wenn man die vier Punkte L, N, M, Q (15 Fig. III. Taf.), in welchen die aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OL beschriebene Sphäre von den vier Flächen der Pyramide berührt wird, durch größte Bögen der Sphäre verbindet, entstehen in derselben Oberfläche vier sphärische Dreyecke, LNQ der Spitze B; MNQ der Spitze A; MLQ der Spitze C; und LMN der Spitze D entgegen gesetzt. In diesen Dreyecken sind die Seiten die Supplemente der drey Winkel der entgegen stehenden Dreyecke *abc*, *αβκ*, 𝔄𝔅𝔈, *πμν*; und die Winkel sind die Supplemente der Seiten eben dieser Dreyecke. Zum Beyspiele ist die Seite LN das Supplement des Winkels *α*, die Seite LQ des Winkels *κ*; die Seite NQ des Winkels *β*. Item ist der Winkel NLQ das Supplement der Seite *ακ*; der Winkel LNQ der Seite *αβ*; und der Winkel NQL der Seite *βκ*. Ein gleiches ist von andern zu verstehen. 15 Fig. III Taf.

Beweis. Man lasse aus L (dem Berührungspunkte der Fläche BDC) auf BD einen Perpendikel L*δ* fallen,

len, und verbinde δ mit dem Berührungspunkte N der Fläche ADB, so wird auch Nδ auf BD senkrecht stehen, oder (welches eines ist) die aus L und N auf BD fallenden Perpendikel treffen in dem nämlichen Punkte δ
14 Fig. III Taf. ein. Dieses zu beweisen, gehe man auf die 14 Figur zurück. Es ist klar, daß BOL, BON zwey rechtwinklichte Dreyecke sind; und da OL = ON, die Seite BO aber gemein, muß nothwendig auch BL = BN seyn; und da auch in den sphärischen Dreyecken FαT, FαH die Winkel bey α gleich, wie auch FT = FH, die Seite Fα beyden gemein ist, muß auch Tα = Hα seyn. Es steht demnach 1 : $cos.$ αT = BL : Bδ, und 1 : $cos.$ αH = 1 : $cos.$ αT = BN (= BL) : Bδ, das ist Lδ, Nδ treffen in δ zusammen.

15 Fig. III Taf. Auf gleiche Art wird erwiesen, daß (15 Fig. III Taf.) die aus L und M auf DC gezogenen Perpendikel Lη, Mη in dem nämlichen Punkte η eintreffen; wie auch die aus M und Q auf AC in ε; die aus M und N auf AD in ϑ, und die aus L und Q auf BC fallen, in dem Punkte φ sich schneiden. Ueber dies ersieht man, daß indem OL auf den Plan BDC senkrecht steht, wie auch ON auf den Plan BDA, δLO, δNO rechte Winkel sind; und da LN mit dem Halbmesser OL = ON beschrieben wird, berühren nothwendig δL, δN den Bogen NL, und liegen mit dem Sector LON in dem nämlichen Plane. Wir haben demnach ein bey L und N rechtwinklichtes Viereck, und sind NδL + NOL = 180°, das ist, NL (das Maaß des Winkels NOL) ist das Supplement des Winkels NδL. Indem aber Nδ, Lδ auf BD senkrecht stehen, ist dieser Winkel dem $\beta\alpha\varkappa$ gleich, folglich ist die Seite NL des Dreyeckes NLQ das Supplement des Winkels α.

Auf gleiche Weise wird der Bogen LQ von den auf BC fallenden Perpendikeln Lφ, Qφ in L und Q berührt,

berührt, und ist demnach der Winkel LOQ, oder der Bogen LQ, das Supplement des Winkels LφQ, oder des Winkels $\alpha\varkappa\beta$. Eben also sind die aus N und Q auf BA gezogenen Perpendikel Nγ, Qγ Tangenten des Bogens NQ, welcher (oder der Winkel NOQ) das Supplement des Winkels NγQ, oder $\alpha\beta\varkappa$ ist.

Was von dem Dreyecke LQN im Absehen auf $\alpha\beta\varkappa$ gemeldet worden, muß auch von den übrigen verstanden werden; und ist also der erste Theil unseres Satzes bewiesen.

Aus dem vorigen ist klar, daß δL den Bogen NL in L, und φL den Bogen LQ in dem nämlichen Punkte L berühre, und ist folglich der Winkel δLφ dem sphärischen NLQ gleich, wie bekannt ist. Indem aber in dem Vierecke BδLφ, δ und φ rechte Winkel sind, ist δLφ das Supplement des δBφ, das ist, der Winkel NLQ ist das Supplement der Seite $\alpha\varkappa$. Ebenmäßig berührt φQ den Bogen LQ in Q, und γQ den Bogen NQ in eben dem Punkte Q, daß demnach der Winkel φQγ dem sphärischen NQL gleich ist. Da aber in dem Vierecke BφQγ die bey φ und γ rechte Winkel sind, muß φQγ das Supplement des φBγ seyn, mithin auch der sphärische NQL der Seite $\beta\varkappa$. Endlich berühren δN, γN die Bögen LN und QN in N, und ist der sphärische Winkel QNL dem flachen δNγ gleich; und da dieser in dem bey δ und γ rechtwinklichten Vierecke BδNγ das Supplement des Winkels δBγ ist, muß auch QNL das Supplement der Seite $\alpha\beta$ seyn.

Eben dieser Beweis wird ohne Beschwerde auf die übrigen Dreyecke angewendet, daß also auch der zweyte Theil des Satzes am Tage liegt.

30. Zusatz. Aus dem Satze folgt, daß der Winkel N des Dreyeckes LNQ mit $180° - \varkappa\alpha$ gleich ist;

der Winkel $L = 180^\circ - \alpha\beta$, und $Q = 180^\circ - \beta\varkappa$, und wird demnach der Raum des Dreyeckes $LNQ = (N + L + Q - 180^\circ) \times 1 = (360^\circ - \alpha\varkappa - \alpha\beta - \beta\varkappa) \times 1$. Eben so ist der Winkel $\alpha = 180^\circ - LN$; $\beta = 180^\circ - NQ$; $\varkappa = 180^\circ - LQ$; folglich ist der Raum des Dreyeckes $\alpha\beta\varkappa = (\alpha + \beta + \varkappa - 180^\circ) \times 1 = (360^\circ - LN - NQ - LQ) \times 1$. Die Differenz der Räume dieser Dreyecke wird also $(LN + NQ + LQ - \alpha\varkappa - \alpha\beta - \beta\varkappa) \times 1$, das ist, wenn man die Summe der Seiten des Dreyeckes $\alpha\beta\varkappa$ von der Summe der Seiten des Dreyeckes LNQ abzieht, und den Unterschied mit dem Halbmesser multipliciert, bekömmt man die Differenz der Räume dieser Dreyecke.

Ferner ist der Innhalt aller vier Dreyecke MLN, LQN, NMQ, MQL der ganzen Oberfläche der Sphäre gleich, das ist = 8 rechten Winkeln mit dem Halbmesser multipliciert; und die Summe aller Seiten der vier Dreyecke *abc*, $\alpha\beta\varkappa$, $\pi\mu\nu$, ABC ist auch 8 rechten Winkeln gleich; oder wenn $Aa = B\alpha = CA = D\pi = OL$, ist die Oberfläche der Sphäre der doppelten Summe der 12 Sectoren der vier Dreyecke *abc*, $\alpha\beta\varkappa$, $\pi\mu\nu$, ABC gleich. Es folgt auch, daß wenn man von der doppelten Oberfläche der Sphäre die doppelte Summe der 6 Seiten, welche die Berührungspunkte verbinden, abzieht, man die Oberfläche der vier Dreyecke *abc*, $\alpha\beta\varkappa$ rc. erhält.

31. IV. Satz. Wenn man aus der Spitze E
16 Fig. III Taf. (16 Fig. III Taf.) der Pyramide mit einem beliebigen Halbmesser E*a* auf den Seitenflächen die Bögen *ab*, *bc*, *cd*, *da* rc. beschreibt, und daraus ein Vieleck entsteht, in dem man einen Cirkel beschreiben kann, der alle Seiten des Vieleckes in *e*, *f*, *g*, *h* berührt, so kann man auch einen Punkt O in der Pyramide finden, aus welchem

chem als dem Mittelpunkte, man eine Sphäre beschreiben kann, welche alle Flächen der Pyramide berührt.

Beweis. Man ziehe aus der Spitze E durch den Mittelpunkt F des in dem Vielecke *abcd* beschriebenen Cirkels eine Linie EFO, wie auch auf die Berührungspunkte *e*, *f*, *g*, *h* aus F die Halbmesser F*e*, F*f*, F*g*, F*h*.

Aus einer beliebigen Ecke A bey der Grundfläche ABCD beschreibe man ein sphärisches Dreyeck $\alpha\beta\gamma$; theile die Winkel gleich ab, und suche den Punkt ε, im welchen sich die theilenden Bögen $\alpha\varepsilon$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\varepsilon$ schneiden.

Man ziehe aus A durch ε eine Linie, die irgendwo in O an die Linie EO stossen muß; und der Punkt O ist der Mittelpunkt der Sphäre. Denn da die Winkel $\varepsilon\alpha\beta$, F*ad* die Hälfte der Neigung des Planes BEA gegen den Plan AED messen, liegen EO, AO in dem nämlichen Plane, mithin müßen sie sich irgendwo schneiden.

Man ziehe durch *e*, *f*, *g*, *h* in den Seitenflächen E*e*G, E*f*H, E*g*I, E*h*K, und lasse aus O auf diese die Perpendikel OG, OH, OI, OK fallen, so werden alle diese nicht allein auf die gemeldeten Linien, sondern auch auf die Flächen selbst senkrecht stehn, und unter einander gleich seyn, indem 1 die Plane EF*e*, EF*f*, EF*g*, EF*h* auf die Seitenflächen der Pyramide perpendikulär sind; und 2 in den Analogien 1 : *sin*. F*e* = EO : OG ; 1 : *sin*. F*f* = EO : OH ; 1 : *sin*. F*g* = OE : OI ; 1 : *sin*. F*h* = EO : OK, die Sinus der Halbmesser, und EO allemal gleich sind, mithin auch OG = OH = OI = OK.

Es ist aber auch in dem II. Satze erwiesen worden, daß wenn in dem sphärischen Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ der Punkt ε auf die vorgeschriebene Art bestimmt wird, die Perpendikel OK, OG mit OL gleich sind, und muß also

 auch

auch OL mit OI, OH gleich seyn, folglich kann ein jeder dieser Perpendikel der Halbmesser einer Sphäre seyn, welche in G, H, I, K, L die Flächen der Pyramide berührt. W. zu erw. w.

32. Anmerkung. Wie wird man aber erkennen, wenn das Vieleck *abcd* unregelmäßig ist, ob man darinnen einen Cirkel beschreiben könne? Ich setze hier voraus, es werde die Pyramide gegeben, und können folglich die Seiten, und Winkel des Vieleckes berechnet werden. Nun nehme man ein Dreyeck, zum Beyspiele *aFb*, im welchen die Seite *ab* sammt den Winkeln F*ab*, F*ba*, die die Hälfte der *dab*, *cba* sind, bekannt sind, und suche den Perpendikulärbogen, der aus F auf *ab* fällt. Eben dieses muß man mit der Seite *bc* vornehmen, mithin hat man so viele Dreyecke zu berechnen, als Seiten in dem Vielecke sind. Befindet man alle diese Perpendikulärbögen gleich, so hat das Vieleck das erforderte Bedingniß.

Will man der Berechnung überhoben seyn, so theile man alle Winkel des Vieleckes gleich ab; schneiden sich alle theilende Bögen in dem nämlichen Punkte F, so schließt man, daß darinnen ein Cirkel beschrieben werden kann.

33. I. Zusatz. Wenn das Vieleck regelmäßig ist, kann man allemal in der Pyramide eine Sphäre beschreiben, es mag die Grundfläche ABCD gerad, oder schief auf die Achse stehen.

34. II. Zusatz. Wenn man die Berührungspunkte K, G, H, I der Seitenflächen der Pyramide mit großen Cirkelbögen der Sphäre verbindet, bekömmt man ein Vieleck, dessen Seiten die Supplemente der Winkel *a*, *b*, *c*, *d* des Wieleckes *abcd* sind; und die Winkel IKG, KGH 2c. die Supplemente der Seiten *ad*, *ab* 2c. Der

Beweis

Beweis ist mit jenem vollkommen gleich, der in dem III. Satze vorkömmt.

35. II Aufgabe. Es wird in einer Sphäre eine Pyramide gegeben, deren Ecken an ihre Oberfläche in G, H, I, K, L stossen; man verlangt eine Pyramide, deren Flächen in eben diesen Punkten die Sphäre berühren.

Auflösung. Man ziehe die Bögen GL, HL ꝛc. und mache auf G eine Tangente Gϕ, daß Gϕ = *tang.* $\frac{1}{2}$GL. Eben also zieht man auf H die Tangente Hϑ = *tang* $\frac{1}{2}$HL, also, daß die Tangenten in den Planen der Bögen liegen. Auf gleiche Art zieht man auf I, K ꝛc. Tangenten der halben Bögen IL, KL ꝛc. Durch die Punkte ϕ, ϑ ꝛc. zieht man die Linien AB auf Gϕ, oder Lϕ, BC auf Hϑ oder Lϑ senkrecht, und so fort, bis diese Linien das flache Vieleck ABCD schließen. Dann bestimmt man durch die Tangenten der $\frac{1}{2}$GH und $\frac{1}{2}$GK die Linien BE, AE, welche auf sie senkrecht sind, und das Dreyeck AEB schließen. Aus den übrigen Ecken der Grundfläche ABCD werden CE, DE gezogen, und die ganze Pyramide bestimmt. Der Beweis erhellet aus den vorigen Sätzen.

Für den Berührungspunkt der Grundfläche muß man L nehmen, welches der gemeinschaftliche Scheitelpunkt so vieler Dreyecke ist, als Seitenflächen der verlangten Pyramide erfordert werden. Ist die in der Sphäre gegebene Pyramide dreyseitig, so ist es willkührlich, was für einen Punkt aus den gegebenen man für die Berührung der Grundfläche annehmen will.

36. I. Anmerkung. Wenn man die sphärischen Dreyecke GLH ꝛc. berechnet, geben die Winkel LGH, LHG, GLH die Supplemente der geradlinichten Winkel ABE, CBE, ABC; und die Seiten GL, HL, HG die Neigung der drey Plane ABDC, AEB, BEC, wie

aus dem vorigen einleuchtend ist, und wenn also der Halbmesser der Sphäre auch gegeben wird, läßt sich die ganze umschriebene Pyramide berechnen.

37. II. Anmerkung. Ich habe schon in meiner Elementärgeometrie angemerkt, daß das Maaß eines kör-
17 Fig. III Taf. perlichen Winkels O (17 Fig. III Taf.) nur die Oberfläche eines sphärischen Dreyeckes ABC seyn könne, welche zwischen den Bögen der Sectoren AOB, AOC, BOC enthalten wird. Die Bögen selbst messen den Winkel O gewißlich nicht. Denn aus der Summe derselben kann man verschiedene flache Winkel machen, welche auch verschiedene körperliche Winkel enthalten. Betrachtet man einen körperlichen Winkel als die Spitze einer Pyramide, so kann man für die Grundfläche derselben verschiedene Plane annehmen, und können also diese verschiedene Plane das Maaß eben desselben körperlichen Winkels nicht seyn. Nur allein die Oberfläche des sphärischen Dreyeckes ist diesem Unfuge nicht unterworfen, indem die Größe des Halbmessers der Sphäre so wenig in die Größe des körperlichen Winkels einen Einfluß hat, als die Länge der Schenkel in die Größe eines flachen Winkels. Was von einem Dreyecke gesagt wird, ist eben von allen Vielecken zu verstehen, wenn der körperliche Winkel von mehr als dreyen flachen enthalten wird. Ich werde also unter dem Worte der Solidität eines körperlichen Winkels allemal den Innhalt eines sphärischen Vieleckes verstehen, wenn man die Spitze als den Mittelpunkt einer Sphäre betrachtet, aus dem man auf den Seitenflächen mit dem Halbmesser der Sphäre Cirkelbögen beschreibt.

18 Fig. III Taf. 38. V. Satz. Wenn man aus der Spitze E eines dreyseitigen körperlichen Winkels (18 Fig. III Taf.) ein sphärisches Dreyeck *abc* beschreibt, und durch dessen Punkt *o*, allwo sich die Bögen *ao*, *bo*, *co*, welche die

sphäri-

sphärischen Winkel gleich abtheilen, untereinander schneiden, die Linie EoO zieht; aus einem beliebigen Punkte O derselben auf $E\delta$, $E\vartheta$, $E\eta$ drey Perpendikel $O\delta$, $O\vartheta$, $O\eta$ fallen läßt; auch die Seitenflächen durch die Flächen $O\alpha\delta\beta$, $O\beta\eta\gamma$, $O\alpha\vartheta\gamma$ also schneidet, daß die erste auf $E\delta$, die zweyte auf $E\eta$, und die dritte auf $E\vartheta$ senkrecht stehe, bekömmt man einen durch sechs irreguläre Vierecke eingeschlossenen Körper, dessen acht körperliche Winkel durch die flachen, welche in demselben vorkommen, richtig können gemessen werden.

Beweis. Wenn man das vorige recht überdenket, ist klar, daß im gegenwärtigen Falle der Punkt O der Mittelpunkt der Sphäre sey, welche die Seitenflächen der Pyramide in α, β, γ berührt, und daß also $O\alpha$ auf die Fläche $\alpha\delta E\vartheta$; $O\beta$ auf die Fläche $\beta\delta E\eta$; und $O\gamma$ auf die Fläche $\gamma\vartheta E\eta$ senkrecht stehen: wenn man also zum Beyspiele aus β, als dem Mittelpunkte die Cirkelbögen df, fe, ed beschreibt, werden d, und f rechte Winkel, und ist also $e + d + f - 180^{\circ} = e$, mithin wird der Innhalt dieses Dreyeckes $= e \times 1 = \delta\beta\eta \times 1 =$ der Solidität des körperlichen Winkels β, der von den drey flachen $\delta\beta\eta$, $\delta\beta O$, $\eta\beta O$ eingeschlossen wird. Man sieht, daß eben dieses von dem soliden Winkel α, wie auch γ zu verstehen sey, daß nämlich der erste $= \delta\alpha\vartheta \times 1$, der zweyte $= \vartheta\gamma\eta \times 1$.

Eben also ist die Solidität des Winkels $\delta = \beta\delta\alpha \times 1$. Denn da $E\delta$ auf die Fläche $\alpha\delta\beta O$ senkrecht steht, sind in dem sphärischen Dreyecke hgi die g und i rechte Winkel, und wird also dessen Innhalt $= (h + g + i - 180^{\circ}) \times 1 = h \times 1 = gi \times 1 = \beta\delta\alpha \times 1$. Man weiset dieses auch eben also von der Ecke ϑ, und η; die Solidität der ersten ist $= \alpha\vartheta\gamma \times 1$; der zweyten $= \beta\eta\gamma \times 1$.

Der solide Winkel E hat zum Maaße die Winkel a, b, c weniger 180°, mit 1 multipliciert, oder $(\delta + \eta + \vartheta - 180^{\circ}) \times 1$. Es ist aber $\delta + \alpha O \beta = 180^{\circ} = \eta + \beta O \gamma = \vartheta + \alpha O \gamma$, indem wir erwiesen haben, daß die Winkel bey O die Supplemente der δ, η und ϑ sind; folglich wird $(\delta + \eta + \vartheta - 180^{\circ}) \times 1 = (\delta + \eta - \alpha O \gamma) \times 1 = (\eta + \vartheta - \beta O \alpha) \times 1 = (\vartheta + \delta - \beta O \gamma) \times 1$.

Endlich wird die Solidität des körperlichen Winkels O (den die flachen $\alpha O \gamma$, $\gamma O \beta$, $\beta O \alpha$ enthalten) folgender Gestalt gefunden. Wir haben erwiesen, daß indem $\beta\delta$, $\alpha\delta$, $\beta\eta$, $\alpha\vartheta$, $\gamma\vartheta$ die Tangenten der Bögen sind, welche die Berührungspunkte β, α, γ der Sphäre verbinden, die Winkel $\delta\beta\eta$, $\eta\gamma\vartheta$, $\vartheta\alpha\delta$ mit den sphärischen der drey Cirkelbögen gleich sind; wie auch daß eben diese drey Winkel die Supplemente der Seiten ac, ab, bc, oder der flachen Winkel $\delta E \eta$, $\eta E \vartheta$, $\vartheta E \delta$ sind; mithin wird die Solidität der Ecke $O = (\delta\beta\eta + \eta\gamma\vartheta + \vartheta\alpha\delta - 180^{\circ}) \times 1 = (\delta\beta\eta + \eta\gamma\vartheta - \delta E \vartheta) \times 1 = (\eta\gamma\vartheta + \vartheta\alpha\delta - \delta E \eta) \times 1 = (\vartheta\alpha\delta + \delta\beta\eta - \vartheta E \eta) \times 1$.

Es ist demnach klar, daß alle solide Winkel dieses Körpers durch die flachen, welche in demselben vorkommen, können gemessen werden. **W. zu erw. w.**

§. III.

Einige Anmerkungen über pyramidalische Keile.

39. Ich betrachte hier den Keil nur so weit, als er durch eine auf der Grundfläche angebrachte Kraft einen Körper zertheilt. Wenn die Querfäserchen eines Körpers leichter zertrennet, als jene gebrochen werden, die sich nach der Länge erstrecken, und der Körper ziemlich elastisch ist, kann man wohl den Keil ansehen, als ob

er

er vermittelst eines Hebels wirkete; da aber dieser Umstand nur zufällig ist, übergehe ich ihn gänzlich. Ich stelle mir vor (19 Fig. IV Taf.), der ganze Widerstand, der bey der Theilung zu überwinden ist, (er mag hernach aus der Anziehung, oder aus der Spannung der Fäserchen; aus einem Drucke, aus der Reibung, oder aus was immer entstehen), sey in einem Punkte M vereiniget, und wirke auf die Seitenfläche DFLK des Keils senkrecht nach der Richtung PM. Eben dieses stelle ich mir vor, daß es auf der anderen Fläche HGLK bey N geschehe. Wenn man die Richtungen PM, RN bis in O verlängert, und aus dem gleichschenklichten Dreyecke MON ein Parallelogramm macht, nämlich MONI, so ist klar, daß um die Kraft mit dem Widerstande ins Gleichgewicht zu setzen, diese sich wie OI, jener aber wie MO + ON verhalten müße, oder da OC = CI, MO = ON, wie OC zu MO, oder wegen Aehnlichkeit der Dreyecke OCM, OAE, wie AO zu AE, oder endlich, wenn der Winkel AEB = φ, wie *sin.* $\frac{1}{2}\varphi$ zu 1. 19 Fig. IV Taf.

40. Ich weiß wohl, daß einige das Verhältniß der Kraft zum Widerstande AB : OE ansetzen, in dem der Körper schon um MN geschieden ist, da die Kraft den Raum CE durchläuft. Allein da nicht die Frage von der Größe der Wirkung, sondern von dem Verhältniße der Kraft zur Last ist, ist es weit natürlicher, daß man die Richtung des Widerstandes gegen die theilenden Flächen senkrecht annehme; und da MN gegen die Seiten des Keils schief liegt, scheint es der Statik mehr angemessen zu seyn, daß MO + ON den Widerstand, und OI die Kraft ausdrücke.

41. Auf diese Art betrachtet man gemeiniglich in der Statik den Keil. Allein wenn man einen Keil, wie *abc*E (22 Figur IV Tafel), dessen drey Seitenflächen 22 Fig. IV Taf.

E*ab*,

Eab, Ebc, Eca in eine Spitze einer dreyseitigen Pyramide zusammen gehen, sich vorstellet, lassen sich mehrere Fragen darüber aufwerfen; zum Beyspiele nach was für einer Richtung die Kraft auf den Kiel wirken müße, damit die Spitze des Keils in einer geraden Linie OE, die auf die Fläche des Körpers senkrecht steht, fortgetrieben werde? Bey dem gewöhnlichen prismatischen Kei-
19 Fig. IV Taf. le DHGFLK (19 Fig. IV Taf.), ist es außer Zweifel, daß OIE durch den Mittelpunkt der Grundfläche O gehen müße. Damit dieses in dem pyramidalischen geschehe, wird unumgänglich erfordert, daß der Widerstand auf allen Seiten gegen die wirkende Kraft gleich sey.

42. Nachgehends, wenn ein prismatischer Keil
20 Fig. IV Taf. ABCDFG (20 Fig. IV Taf.) nach der Richtung OE, die auf die Grundfläche ABCD perpendikulär steht, in einen Körper hinein getrieben wird, ist es eben eines, als wenn unendlich viele Keile A*ab*, BG*g*, *acdbgh* ꝛc. auf eine gleiche Tiefe in den nämlichen Körper versenkt würden, die alle einander vollkommen gleich sind. Hingegen wenn zwey dreyeckichte Flächen *a*E*d*, *h*E*d* nach der
21 Fig. IV Taf. Richtung OE (21 Fig. IV Taf.) in einen Körper gestossen werden, also daß die Linien O*a*, O*h*; *kb*, *ki*; *pc*, *pl* ꝛc. auf die Flächen perpendikulär stehen, müßen die Keile *badeih*, *cblfei* ꝛc., die alle eine gemeinschaftliche Schneide E*δ* haben, auf die sie senkrecht stehen, in Betrachtung gezogen werden, indem diese in den Körper eindringen, und immer abwachsen, ob sie schon ähnlich sind. Dieser Unterschied muß im Ansehen der ganzen Wirkung nothwendig auch das Verhältniß der Kraft gegen den Widerstand verändern. Diese, und mehr andere zu untersuchen habe ich mir in Gegenwart vorgenommen. Um aber die Beweise deutlich zu machen, muß ich einige Erklärungen voraus schicken.

43. In der sphärischen Geometrie habe ich erwiesen, und in dem vorigen Paragraphe voraus gesetzt, daß wenn man (23 Fig. IV Taf.) die Winkel A, B, C eines sphärischen Dreyeckes durch die Bögen AO, BO, CO gleich abtheilet, diese sich in dem Mittelpunkte eines Cirkels FED schneiden, der die drey Seiten des Dreyeckes berührt. Allein man kann, gleichwie in dem geradlinichten, wenn man die Seiten AB, AC verlängert, bis sie sich wieder in A schneiden, noch einen Punkt *o* finden, aus welchem die Perpendikel *of*, *oe*, *od*, die auf eben diese drey Bögen fallen, gleich sind; denn man darf nur die äußern Winkel *a*CB, *a*BC durch die Bögen C*o*, B*o* gleich abtheilen, und A*o* bis in *a* verlängern, so müßen sie sich aus eben der Ursache in *o* untereinander schneiden im Ansehen des Dreyeckes C*a*B, aus welcher dieses in dem Dreyecke ABC in O geschieht. Und eben also, wenn die Seiten CA, CB verlängert werden, findet man den Punkt ω, aus dem die Perpendikulärbögen ωδ, ωε, ωφ gleich sind; wie auch den Punkt 𝔒, wenn BC, BA bis in 𝔅 verlängert werden, aus dem die Perpendikel 𝔒𝔈, 𝔒𝔇, 𝔒𝔉 gleich sind. 23 Fig. IV Taf.

44. Merkwürdig ist allhier, daß wenn man die Punkte *o*, ω, 𝔒 mit großen Cirkelbögen verbindet, man ein Dreyeck bekömmt, auf dessen Seiten die Bögen OA, OB, OC senkrecht stehen. Denn da die vier Winkel ABC + CB*a* + *a*B*x* + AB*x* mit vier rechten gleich sind, und ABC = *a*B*x*, AB*x* = CB*a*, ist klar, daß ABC + CB*a* = 180°, und die Hälfte ½ABC + ½CB*a* = OBC + CB*o* = 90°, folglich auch OBω = 90°, und es muß OB auf *o*ω perpendikulär stehen. Eben also ersieht man, daß OC auf *o*𝔒, und OA auf 𝔒ω senkrecht sey. Da aber BO durch 𝔒, AO durch *o*, CO durch ω geht, ist einleuchtend, daß, wenn in dem Dreyecke 𝔒*o*ω aus den drey Winkeln auf die entge-

gengen-

gengesezten Seiten drey Perpendikulärbögen gezogen werden, sich diese in eben dem Punkte O schneiden, im welchen sich die Bögen durchschneiden, welche die Winkel des Dreyeckes ABC gleich abtheilen. Hieraus erfolgt auch, daß, wenn man die Punkte A, B, C, auf welche die Perpendikel *o*A, ωC, ƉB in dem Dreyecke *o*Ɖω fallen, verbindet, man ein Dreyeck ABC bekömmt, dessen drey Winkel durch die nämlichen Perpendikel gleich abgetheilt werden. Und man ersieht endlich, daß um die Punkte *o*, Ɖ, ω zu bestimmen, nur vonnöthen sey, auf die Bögen OA, OB, OC drey Perpendikulärbögen ƉAω, ωB*o*, *o*CƉ zu errichten, und bis sie zusammenstossen, zu verlängern.

45. Um aber auf unser Vorhaben zu kommen, wollen wir vor allen die Richtung der auf einen pyramidalischen Keil wirkenden Kraft suchen, damit die Spitze in den Körper in einer auf dessen Fläche perpendikulären Linie eindringe.

22 Fig. IV Taf. Man beschreibe (22 Fig. IV Taf.) aus der Spitze E auf den drey Seitenflächen mit einem beliebigen Halbmesser E*a* ein sphärisches Dreyeck *abc*; theile die Winkel durch die Bögen *ao*, *bo*, *co* gleich ab, und ziehe aus E durch *o* eine gerade Linie E*o*O; ich erweise, daß nach dieser die Kraft auf den Keil wirken müße. Man lasse aus *o* auf die drey Seiten des Dreyeckes die Perpendikulärbögen *od*, *of*, *oe* fallen, so werden diese einander gleich seyn. Wenn man aus E durch die Punkte *d*, *f*, *e* Linien zieht, und alle diese Linien verlängert, auch aus O auf dieselben Perpendikel Oα, Oγ, Oβ, Oδ, Oϑ, Oη fallen läßt, werden Oα, Oγ, Oβ einander gleich seyn; Oδ, Oϑ, Oη aber gegen EO sich wie die Sinus der Bögen *oa*, *ob*, *oc* zum Halbmesser verhalten; denn es steht $1 : \sin. od = EO : O\alpha$; $1 : \sin. of =$ EO

EO : $O\gamma$; 1 : *sin. oe* = EO : $O\beta$. Gleichfalls ist 1 : *sin. ao* = EO : $O\delta$; 1 : *sin. ob* = EO : $O\vartheta$, und 1 : *sin. oc* = EO : $O\eta$.

In dem zweyten Abschnitte haben wir erwiesen, daß die Winkel $\alpha\delta\beta$, $\alpha\vartheta\gamma$, $\gamma\eta\beta$ den Winkeln *bac*, *abc*, *bca* gleich, und die Winkel $\alpha O\beta$, $\alpha O\gamma$, $\gamma O\beta$ derselben Supplemente sind, wie auch daß $O\alpha$ auf den Plan $\alpha\delta E$, $O\beta$ auf den Plan $\beta\delta E$, und $O\gamma$ auf $\gamma\vartheta E$ senkrecht stehen, und wenn man also $\alpha\delta\beta$ als einen unendlich dünnen Keil ansieht, so verhält sich der Widerstand zur Kraft, wie $O\delta$: $O\alpha$ = 1 : *sin.* $\frac{1}{2}a$. Aus eben dieser Ursache wird ein in α und γ angebrachter Widerstand im Ansehen des unendlich dünnen Keils $\alpha\vartheta\gamma$ sich zu einer gleichen Kraft verhalten, wie $O\vartheta$: $O\alpha$ = 1 : *sin.* $\frac{1}{2}b$. Eben dieses erhellet, wenn man den Keil $\gamma\eta\beta$ betrachtet, bey dem das Verhältniß des Widerstandes zur gleichen Kraft $O\eta$: $O\gamma$ = 1 : *sin.* $\frac{1}{2}c$ wird. Wenn demnach in O nach der Richtung OE eine Kraft angebracht wird, die auf alle drey Flächen des pyramidalischen Keils eine Wirkung hat, die man = $O\alpha$ = $O\gamma$ = $O\beta$ setzen kann, wird diese mit dem Widerstande, den der Körper den drey Keilen $\alpha\delta\beta$, $\alpha\vartheta\gamma$, $\gamma\eta\beta$ zu thun vermag, im Gleichgewichte stehen. Denn obschon $O\delta$, $O\vartheta$, $O\eta$ nicht einander gleich sind, so kann doch die Wirkung gegen die Keile nicht größer seyn, als die durch eben diese Keile entgegenwirkenden Kräfte sind, mit denen sie im Gleichgewichte sind. Nun aber ist klar, daß wenn die Kraft in der Oberfläche des sphärischen Dreyeckes *abc* bey dem Mittelpunkte *o* des in demselben beschriebenen Cirkels angebracht würde, sie auf alle drey Seiten gleich wirken würde, daß demnach diese durch die drey gleichen Perpendikel richtig kann vorgestellet werden.

Wenn

Wenn nun dieses im Ansehen der drey Keile $\alpha\delta\beta$, $\alpha\vartheta\gamma$, $\gamma\eta\beta$ sich also verhält, so muß es von allen ähnlichen Keilen wahr seyn, die durch Parallelschnitte mit $\beta\delta x$, $\alpha\vartheta\gamma$, $\gamma\eta\beta$ aus den Flächen $\beta\delta E$, $\alpha\delta E$; $\alpha\vartheta E$, $\gamma\vartheta E$; $\gamma\eta E$, $\beta\eta E$ können gestaltet werden; und in dem alle ähnlich sind, verhält sich die Summe aller Widerstände, die auf sie wirken, zur Summe aller Kräfte, wie $O\delta : O\alpha$, $O\vartheta : O\alpha$, $O\eta : O\gamma$. W. zu erw. w.

46. Man könnte hier billig fragen, warum die Richtung der Kraft nicht durch den Schwerepunkt gehen sollte. Allein wenn man setzet, es sey *o* der Schwerepunkt, nicht aber jener, den wir durch gleiche Abtheilung der Winkel des Dreyeckes bestimmt haben, können die Perpendikulärbögen *od*, *oe*, *of* nicht gleich seyn, folglich auch nicht ihre Sinus; und wenn demnach (24 Fig. IV Taf.) OA auf die Seite AE; OB auf die Seite BE wirken sollte, würde die zusammengesetzte Kraft OD in dem Parallelogramme AOBD nicht durch E gehen, indem OD die Diagonal AB in C gleich abtheilet, OE aber dieselbe in G schneidet, da nämlich der Winkel OEB kleiner seyn muß, als OEA.

24 Fig. IV Taf.

47. Daß die Linie EoO (22 Fig. IV Taf.) nicht durch den Schwerepunkt des Dreyeckes *abc* gehe, kann man auf folgende Weise leicht begreiflich machen, wenn das Dreyeck nicht gleichseitig ist. Es sey ABC (25 Fig. IV Taf.) eben dieses Dreyeck. Man nehme AE mit AB, der kleinsten Seite gleich, beschreibe den Cirkelbogen BGE, und theile denselben in G gleich ab. Durch G ziehe man AD, und verbinde D mit E, so ist klar, daß der Raum ADB = ADE, und da AC > AB, schneidet DE einen Theil des Dreyeckes ABC ab, folglich ist ADC um das Dreyeck EDC größer, als ADB; und AGD (welcher Bogen den Winkel A gleich theilet), theilet das Dreyeck ungleich, folglich muß ein

22 Fig. IV Taf. — 25 Fig. IV Taf.

Bogen

AF, der ABC in gleiche Theile schneidet, mehr gegen AC liegen, damit das Dreyeck BAF dem Dreyecke FAC gleich werde. Und aus diesem ersieht man, daß nur in einem gleichseitigen Dreyecke (22 Fig. IV Taf.) die Linie EO durch dessen Schwerepunkt gehen könne. 22 Fig. IV Taf.

48. Ich habe zum Beyspiele in einem gleichsenklichten Dreyecke ABC (26 Fig IV Taf.) die Seiten AB = CB = 40°, AC = 20° angenommen; den Winkel B = 31° 20′ 46″; A = C = 77° 52′ 10″ gefunden. Nach der Anleitung, die ich in der sphärischen Geometrie das Dreyeck ABC durch den Bogen APE gleich abzutheilen gegeben habe, fand ich CE = 20° 28′ 53″, den Winkel CAE = 52° 47′ 42″, da die Hälfte des Winkels A, (durch welche der Bogen AOG geht, nur 38° 56′ 5″ ist. Aus diesem fand ich ferner DO = 7° 59′ 9″, und etwas darüber; DP aber = 13° 17′ 58″, und etwas mehr. 26 Fig. IV Taf.

49. Allein der Schwerepunkt des Dreyeckes ist nicht P, sondern er liegt in dem Durchmesser der Sphäre, der durch P geht. Diesen zu bestimmen stelle man sich den Durchmesser PKS (27 Fig. IV Taf.) vor, und gedenke bey der andern Seite unweit von S werde die Oberfläche eines sphärischen Segmentes NLM angebracht, die mit dem Dreyecke im Gleichgewichte stehe. Der Innhalt der Oberfläche dieses Segments muß also dem Innhalte des Dreyeckes gleich seyn. In unserem Beyspiele ist der Innhalt des Dreyeckes $= (A + B + C - 180°) \times 1 = (2\,(77°\ 51'\ 10'') + 31°\ 20'\ 46'' - 180°) \times 1 = (7°\ 5'\ 6'') \times 1$. Der Raum der Oberfläche des Segments wird durch $360° \times x$ ausgedrückt, also, daß $x = rS$ = dem Theile des Halbmessers KS, der durch den Halbmesser Nr des Cirkels NLM abgeschnitten wird, vorstelle, und man hat $(7°\ 5'\ 6'') \times 1 = 360° \times x$. Aus dieser Gleichung erhält man $rS =$ 27 F. IV Taf.

$x = \frac{25500}{1296000} = 0{,}019676$ beynahe. Nun weiß man, daß der Schwerepunkt der Oberfläche des Segmentes NLM der Mittelpunkt des rS sey; und da diese Oberfläche mit jener des Dreyeckes ABC gleich ist, ist es klar, daß der Schwerepunkt des Dreyeckes von P gegen K um 0,009838 beynahe entfernt sey.

28 Fig. IV Taf. 50. Wenn man sich (28 Fig. IV Taf.) eine unendlich kleine Pyramide vorstellet, deren Grundfläche *abc*, die Spitze E, und gedenket, daß die Seitenflächen *a*E*b*, *b*E*c*, *c*E*a* allmählig weiter von einander getrieben werden, sie selbst aber in eben dem Maaße wachsen, im welchen sie immer erweitert werden, so kann man hierinnen die Wirkung eines pyramidalischen Keils sich einbilden. Um aber die Seitenflächen dieser Pyramide gesagter Maaßen von einander zu entfernen, wäre nichts tauglichers, als ein rechter Kegel MLND. Wenn man diesen zwischen der Pyramide hineintriebe, würden ihre Flächen in dem nämlichen Verhältniße von einander weichen, im welchen die Halbmesser der Durchschnitte des Kegels wachsen, und da endlich *ab* auf AB, *bc* auf BC, *ca* auf CA zu liegen käme, würde die Grundfläche des Kegels MLN der Cirkel seyn, der in dem Dreyecke ABC kann beschrieben werden, seine Achse PD würde mit *o*E eintreffen, und er würde die Seiten der Pyramide ABCE eben alldort berühren, wohin die aus *o* gezogenen Perpendikel fallen.

51. Man weiß, daß ein gleichseitiges Dreyeck das kleinste aus allen sey, die um einen gegebenen Cirkel können beschrieben werden, es mag hernach die Rede von geradlinichten, oder von sphärischen Dreyecken seyn. Gleichfalls weiß man, daß wenn die Summe der Seiten gleich ist, das gleichseitige Dreyeck das größte aus allen sey. Wenn man also um eben den Cirkel ein anderes

Drey-

Dreyeck, als ein gleichseitiges beschriebe, würde es grös‑ser seyn, als das gleichseitige; und wenn in einem un‑gleichseitigen die Summe der Seiten mit jener des gleich‑seitigen gleich wäre, würde es kleiner seyn, als das gleichseitige. Mithin folgt, daß wenn man in diesem kleineren Dreyecke eben den Cirkel beschreiben könnte, der in dem gleichseitigen beschrieben wird, es nicht wahr seyn könnte, daß das gleichseitige Dreyeck das kleinste sey, das um einen gegebenen Cirkel kann beschrieben wer‑den. Und aus diesem ist einleuchtend, daß wenn die Summe der Seiten gleich ist, der größte Cirkel in einem gleichseitigen Dreyecke beschrieben werden könne. Wenn also in zweyen pyramidalischen Keilen, wie in der 22 Figur, die Summe der Seiten der Dreyecke *abc*, die mit dem nämlichen Halbmesser beschrieben werden, gleich ist, und eines gleichseitig ist, wird dieser Keil eine grös‑sere Kraft erfordern, als jener bey dem die Seiten un‑gleich sind, indem nämlich in dem ersten *od* größer seyn muß, als in dem zweyten. Allein es wird auch die Wirkung des ersten um eben so viel größer, da nämlich der Körper um eben so viel mehr getrennet wird. 22 Fig. IV Taf.

52. Wenn man den Theil GDAE (29 Fig. IV Taf.) eines pyramidalischen Keils CBAE durch unendlich nahe Parallelschnitte mit OE in unendlich viele prisma‑tische Keile GD*obc*E, *oefbcd* ꝛc. abtheilet, ist klar, daß alle diese ähnlich sind, und sowohl DG, *bo*, *fe* ꝛc. als EG, *bc*, *fd* in einer arithmetischen Progression abwach‑sen. Wenn hingegen ein prismatischer Keil GDFA*p*E durch eben so viele Parallelschnitte in unendlich dünne Keile getheilet wird, bleiben diese alle einander gleich; und da die Hälfte der Linien GD, *ob*, *ef* ꝛc. die Kräfte, GE, *bc*, *fd* ꝛc. den Widerstand ausdrücken, ist klar, daß um den Theil GDAE des pyramidalischen Keils in den Körper hinein zu treiben nur die Hälfte jener Kraft 29 Fig. IV Taf.

erfordert werde, welche nothwendig ist, den prismati-GDFApE in eben den Körper hinein zu schlagen. Eben dieses versteht sich von den andern zwey Theilen HDBE, und HGCE.

Ich habe gesagt, daß den Keil GDAE in einen Körper hinein zu treiben die Hälfte der Kraft erfordert werde, welche für einen prismatischen hinlänglich wäre. Denn obschon die Pyramide GDAE nur der dritte Theil des Prisma ist, so ist doch zu bedenken, daß bey allen abwachsenden Keilen *dghife* der nämliche Winkel bey *dg* verbleibe, welcher bey GD*obc*E ist, und es ist demnach eines, gleiche prismatische Keile F*mn*A*pq*, *nmrsqt* ꝛc. je einen nach den andern in Tiefen, die in einer arithmetischen Progression abwachsen, versenken, oder die Keile GD*obc*E, *eofvcd* ꝛc einen jeden nach seiner ganzen Höhe in den Körper hinein treiben; daß also eine mindere Kraft nur wegen der abwachsenden Höhen erforderlich ist.
30 Fig. IV Taf. Eben also (30 Fig. IV Taf.) würde für einen Keil ABCGK, bey dem die Winkel AGC, *dli* abwachsen, die Höhen LG, *kl* aber unverändert verbleiben, die Hälfte jener Kräfte erfordert, welche zu einem gleich hohen prismatischen Keil genug wären.

53. Wir haben erwiesen, daß die Richtung der
31 Fig. IV Taf. Kraft OE (31 Fig. IV Taf.) seyn müße, damit der Keil gerad in den Körper eindringe. Wir wollen itzt setzen, die Richtung der Kraft sey auf OE schief, nämlich FO, und der Keil wird einerseits mehr nach einer Schneide, zum Beyspiele BE, als nach den andern getrieben werden; andererseits, wenn er nicht fest genug ist, in Gefahr abgebrochen zu werden stehen. Man verlängere EO, und lasse aus F den Perpendikel FU darauf fallen. Wenn das Parallelogramm FRUO gemacht wird, ist klar, daß FR (=UO) + RO (=FU) eben die Wirkung haben, welche von FO zu gewarten

ist;

ist; und aus diesen ist nur UO oder FR, die den Keil in den Körper treibet. Man verlängere RO in S, daß OS = RO werde. EP sey der Halbmesser der Sphäre, der durch den Schwerepunkt des Dreyeckes BCA geht. Man verbinde P mit O und S, so kann man anstatt OS die Kräfte OP, PS, oder OP, OQ (wenn SO die Diagonal des Parallelogramms OPSQ ist) betrachten. PS läßt sich wiederum in zwey andere auflösen, PT und ST, derer die erstere auf die Fläche EBC senkrecht, die zweyte mit derselben parallel ist. PT ist demnach der Theil, welcher zur Brechung des Keils angewendet wird, TS aber wird den Keil gegen BE treiben. Eben also löse man OP nach diesen zweyen Richtungen auf, wenn es vonnöthen ist, und man bekömmt die ganze Kraft, die sowohl nach PT, als nach ST gerichtet ist.

54. Wir wollen annehmen, der Keil sey schon bis auf DHG in den Körper eingedrungen, und man wird DG als die Unterlage betrachten können. Aus P ziehe man auf BC einen Perpendikulärbogen PL, und setze 1 : *cos.* PL = EL : EX; und EX : PX (1 : *tang.* PL) = EN : NM; man erhält demnach MN, den Perpendikel, der aus der Linie EP auf die Unterlage DG fällt. Wenn man sich vorstellet, die ganze Stärke der Fäserchen, die dem Bruche widerstehen, sey in M vereinigt, so kann man diese als an dem Arme NM des rechtwinklichten Hebels MNX angebracht betrachten, die brechende Kraft aber am Ende X des Arms NX, und wenn S die Stärke des Zusammenhanges des Keils bedeutet, wird diese zur Kraft seyn, wie S × MN zu PT × NX.

55. Um S zu bestimmen wird mehr erfordert. Man muß aus richtigen Erfahrungen den eigentlichen Zusammenhang der Bestandtheile eines Körpers, zum Beyspiele des Eisens, Stahls rc. wissen, wie viele

Pfund vonnöthen sind, damit ein dergleichen Cylinder breche, wenn das Gewicht in einer gewissen Entfernung von der Unterlage wirket. Ich nenne das Gewicht = P, dessen Abstand von der Unterlage = D, den Halbmesser des Cylinders = R, den Raum des Durchschnittes = C, so wird der Ausdruck der Stärke CR = PD. Man ersieht leicht, daß wenn D verändert wird, auch P müße verändert werden, und wenn eine gewisse Distanz δ gegeben wird, man ein anderes π finde, wenn man nimmt $\frac{C \times R}{\delta} = \pi$. Man berechne den Raum des sphärischen Dreyeckes ABC, den ich $= a^2$ nehme, und setze $a^2 = 360^\circ \times x$, und suche x. Der Durchmesser der Sphäre, zu der das Dreyeck gehört, sey r, so wird der Halbmesser des sphärischen Segments, dessen Oberfläche dem Innhalte a^2 gleich ist, $\sqrt{2rx - xx}$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a^2r}{360^\circ} - \frac{a^4}{(360)^2}\right)} = \frac{a}{360^\circ}\sqrt{2r \times 360^\circ - a^2}.$$

Aus diesem Halbmesser suche man das erforderliche Gewicht, damit dieser Cylinder in eben der Distanz, welche in der Erfahrung ist angenommen worden, breche; zu welchem Ende man nur setzen darf $C \times R : P = \varkappa \times \frac{a}{360^\circ}\sqrt{720r - a^2} : X$, indem man annehmen kann, daß der Zusammenhang bey ungleichen Cylindern, wenn das übrige gleich ist, sich wie ihre Durchschnitte verhalte. Da aber die Dreyecke abwachsen, muß man annoch setzen $EX^2 : EN^2 = a^2 : \alpha^2 = \varkappa : \frac{a^2 \times NE^2}{EX^2}$, und für diesen Durchschnitt mit MN multipliciert sucht man endlich das Gewicht, welches in der Distanz XN angebracht wird.

56. Vielleicht wird man hier zu wissen verlangen, warum ich die Stärke eines Kegels, dessen Spitze in dem Mittelpunkte der Sphäre, und die Grundfläche ein sphärisches Segment ist, dessen Innhalt jenem des Dreyeckes des Keils gleich ist, nicht nach der Solidität der Spitze, (wie ich insgemein von den körperlichen Winkeln (37) angemerkt habe), sondern nach dem flachen Durchschnitt berechne? Allein, wenn man betrachtet, daß die Fäserchen eines pyramidalischen Keils nicht nach der Spitze zusammen laufen, sondern vielmehr parallel zu liegen scheinen, muß man nothwendig die geometrische Solidität von dem physikalischen Zusammenhange unterscheiden. Die Natur weiset uns auch, daß wenn eine Pyramide gebrochen wird, der Bruch kein sphärisches Dreyeck gestalte. Da aber der Halbmesser eines Cylinders, oder Kegels richtig bestimmt wird, man mag die sphärische Oberfläche, oder den flachen Durchschnitt dazu gebrauchen, ist es gleichgiltig, was für einen Weg zu eben dem Zwecke zu gelangen man einschlagen wolle.

57. Ueber dieses muß ich annoch anmerken, ob ich schon gesagt habe, man könne die Stärke aller Fäserchen, die den Zusammenhang verursachen, in dem Schwerepunkte M eines sphärischen Dreyeckes, (für welches der Halbmesser $= \frac{EN}{cos. PL}$ vereinigt betrachten, und als ob diese bey M an dem Arme eines rechtwinklichten Hebels angebracht wäre, daß ich doch dieses nicht als ganz richtig wolle genommen haben. Es kann wohl seyn, daß der Punkt, in dem der Zusammenhang der Fäserchen am stärksten wirket, nicht M sey, sondern näher bey N liege; jedoch ist es sehr wahrscheinlich, daß bey ähnlichen Körpern, besonders wenn sie aus gleicher Materie sind, sein Abstand von N in einem glei-

chen Verhältniße stehe, und daß folglich das Verhältniß der Kräfte nicht geändert werde.

58. Bisher haben wir nur von dreyseitigen Pyramidalkeilen geredet. Wenn die Grundfläche einer Pyramide mehr Seiten hat, und ein Vieleck giebt, in dem man einen Cirkel beschreiben kann, folgt aus jenem, was wir von dem dreyseitigen Keile gesagt haben, daß auch bey einem vielseitigen von dieser Art die Richtung der Kraft die Linie seyn muß, die durch den Mittelpunkt des Cirkels, und die Spitze geht. Regelmäßige Vielecke, und rautenförmige Vierecke sind alle von dieser Klasse. Wenn
32 Fig. IV. Taf. (32 Fig. IV Taf.) bey einem vierseitigen Keile alle vier Seiten AB, AD, CB, CD gleich sind, wird eine größere Kraft erfordert, als wenn zwey Seiten DE, BE zwar unter einander gleich, jedoch kleiner sind, als die Seiten BC, DC. Denn beyde diese Vierecke sind fähig, daß man darinnen einen Cirkel beschreibe; die Diagonale AC theilet die Winkel A, C gleich ab, wie auch DB die Winkel B und D in dem Vierecke ADCB, und ist demnach der Mittelpunkt des Cirkels und des Viereckes einer, nämlich O, und wenn man Oa auf BC senkrecht zieht, wird dieser der Halbmesser des Cirkels. Indem aber der Winkel EBC$<$ABC, fällt der Bogen Bω, der EBC gleich abtheilet, gegen C, und der Halbmesser des Cirkels, der die vier Seiten des Viereckes DEBC berührt, wird der Perpendikel $\omega\alpha = \omega b$. Da aber die Dreyecke OCa, ωCα die rechten Winkel a und α gleich, den Winkel ωCα gemein haben, steht $\sin.$ OC : $\sin.$ ωC $= \sin.$ Oa : $\sin.$ $\omega\alpha$; gleichwie nun $\sin.$ OC $> \sin.$ ωC, also ist auch $\sin.$ O$a > \sin.$ $\omega\alpha$, und O$a > \omega\alpha$.

59. Wenn das Vieleck der Grundfläche also beschaffen ist, daß man keinen Cirkel beschreiben könne, der alle Seiten berühre, jedoch symmetrisch ist, wie
33 Fig. IV Taf. (33 Fig. IV Taf.) ABCD, muß die Richtung der auf

den

den Keil wirkenden Kraft durch den Mittelpunkt der Grundfläche, und durch die Spitze gehen. Man theile die Winkel B, C, D, A durch die Bögen BO, Cω; Dω, AO gleich ab, so werden die Perpendikel ωα, ωβ, ωκ, Oa, Ob, Oc alle unter einander gleich seyn, und zwey gleiche Kräfte, die auf ω und O zu gleicher Zeit wirketen, würden den Keil nach der besagten Richtung in den Körper hineintreiben; allein wenn Oω in K gleich abgetheilt, und die Summe dieser zweyen Kräfte in K angebracht würde, würde eben diese Wirkung erfolgen müßen, und muß also für eine einzige Kraft eben diese Richtung gebraucht werden. Wäre das Vieleck der Grundfläche weder symmetrisch, noch auch eines derjenigen, in denen man einen Cirkel beschreiben kann, der alle Seiten berührt, so müßte man es durch Diagonallinien in Dreyecke, zum Beyspiele (34 Fig. IV Taf.) ABE, EBD, DBC abtheilen, und für ein jedes die Mittelpunkte 𝔄, *a*, *α* der Cirkel suchen, derer Halbmesser die Perpendikel 𝔄𝔅, *ab*, *αβ* sind. Dann müßte man 𝔄, *a* mit den Bogen 𝔄*a* verbinden, und setzen 𝔄𝔅 + *ab* : *ab* = 𝔄*a* : 𝔄c. Nach diesem müßte gleichfalls *cα* gezogen, und K gesucht werden aus folgender Analogie 𝔄𝔅 + *ab* + *αβ* : *αβ* = *cα* : *c*K, das ist, man müßte den gemeinschaftlichen Schwerepunkt der drey Perpendikel K suchen, und eine Kraft bey K anbringen, deren Richtung durch K, und die Spitze des Keils gienge; die Kraft aber müßte die Summe derjenigen drey Kräfte seyn, derer eine jede vermögend wäre ihren dreyseitigen Keil ABE, EBD, DBC in den Körper hinein zu treiben. 34 Fig. IV Taf.

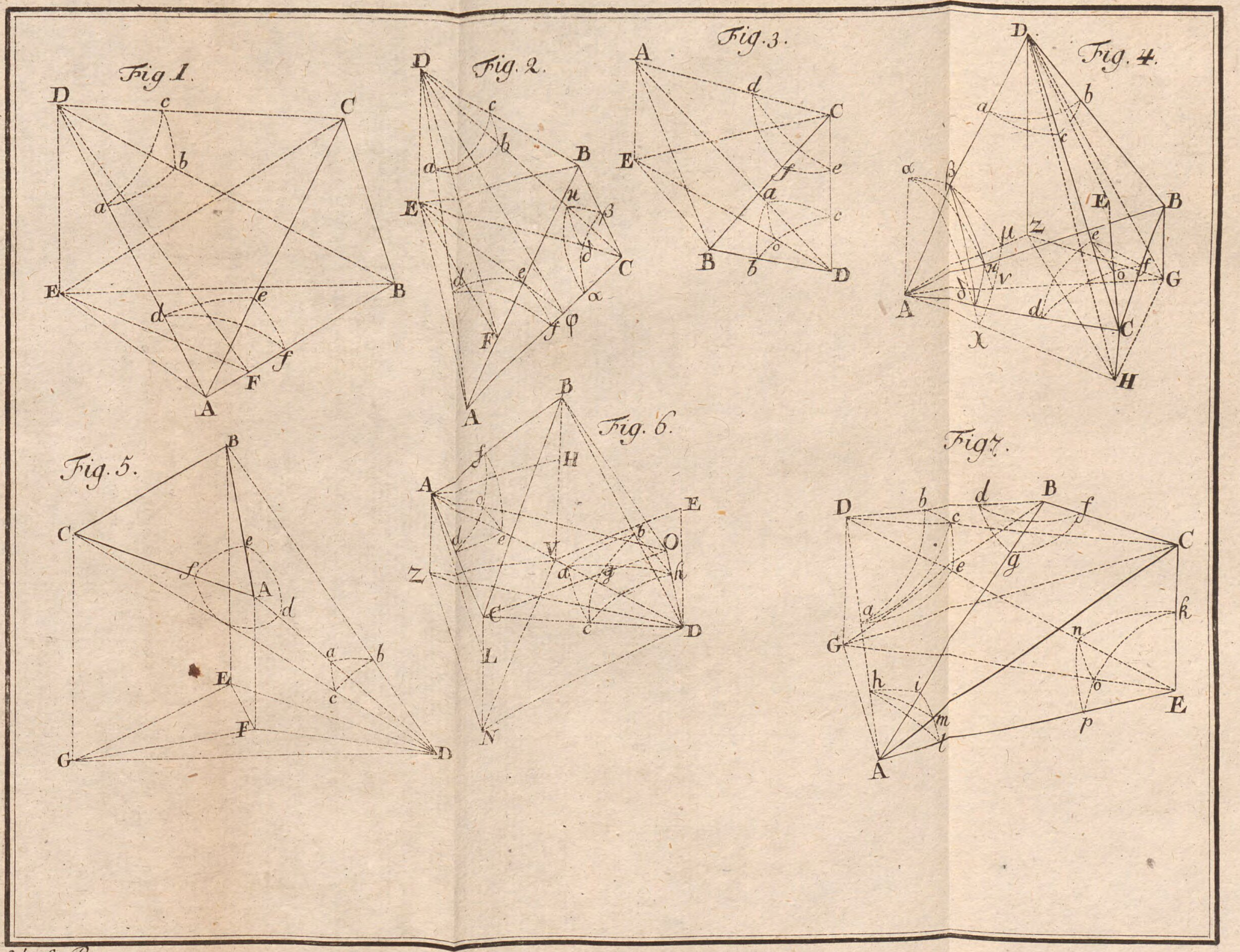
60. Es ist nur noch der conische, oder kegelförmige Keil übrig. (35 Fig. IV Taf.) Was die Richtung der wirkenden Kraft betrifft, ist außer Zweifel, daß dieselbe durch den Mittelpunkt der Grundfläche O, und die Spitze E gehen müße. Wenn man aus O auf die Seiten 35 Fig. IV Taf.

 AD,

AD, BD die Perpendikel OM, ON fallen läßt, ist klar, daß bey einem unendlich dünnen Keile, den der Durchschnitt des Kegels AOBD vorstellet, die Kraft zum Widerstande sich wie *sin.* ODA : 1 verhalten müße, damit sie im Gleichgewichte stehe. Nun aber kann man sich unendlich viele Durchschnitte durch den ganzen Umkreis der Grundfläche vorstellen, und es wird bey allen dieses Verhältniß bestehen, folglich muß es für die Summe aller dieser Durchschnitte, oder für den ganzen Kegel statt haben. Wenn demnach zwey kegelförmige Keile gegeben sind, welche gleichlange Seiten haben, werden die Kräfte für beyde sich gegen einander, wie die Sinus der Winkel ODA, $\omega\delta\alpha$ verhalten. Allein von diesem genug.

IV.

Tab. I.



Scherf. Pyr.

Tab. II

Fig 8

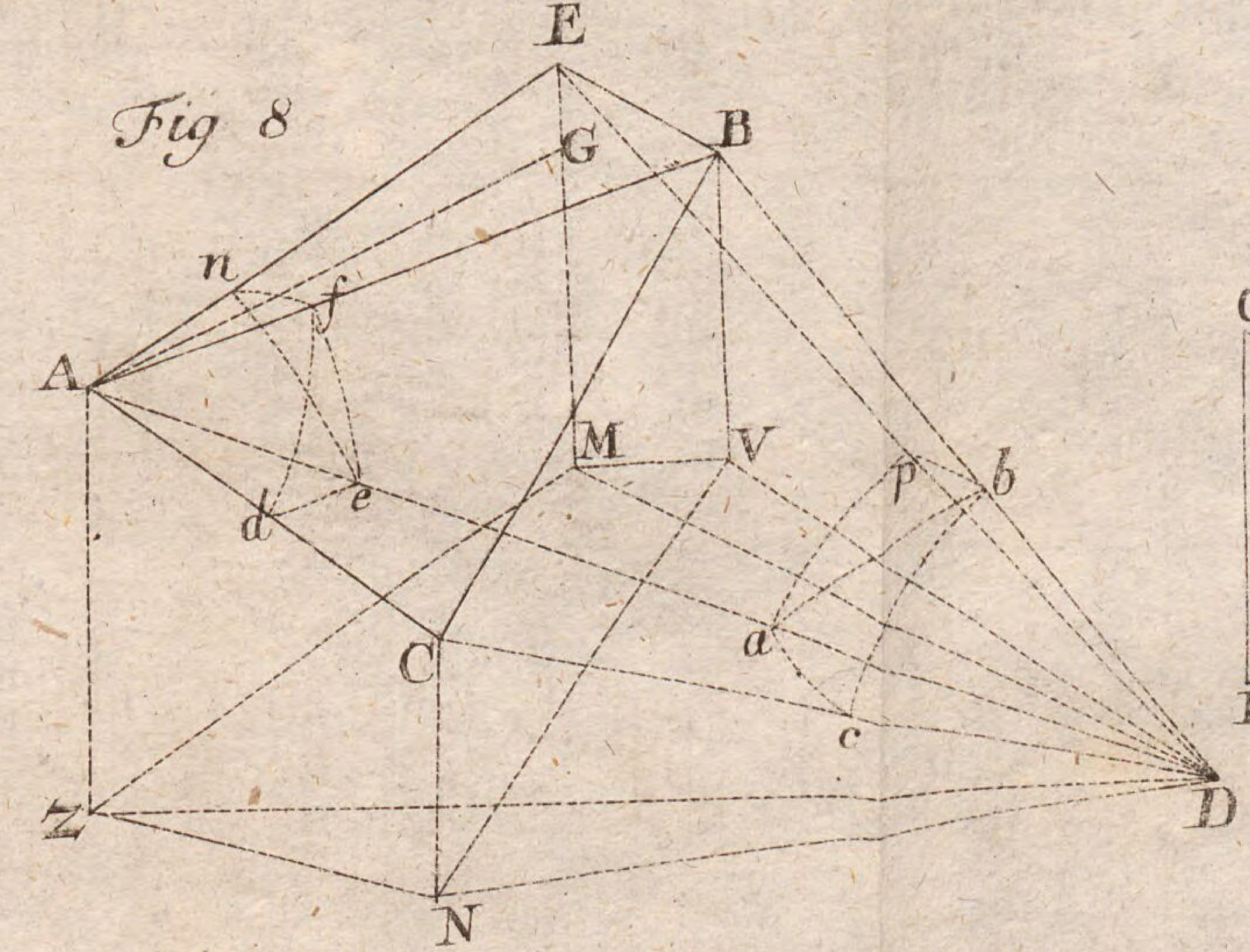


Fig. 10.

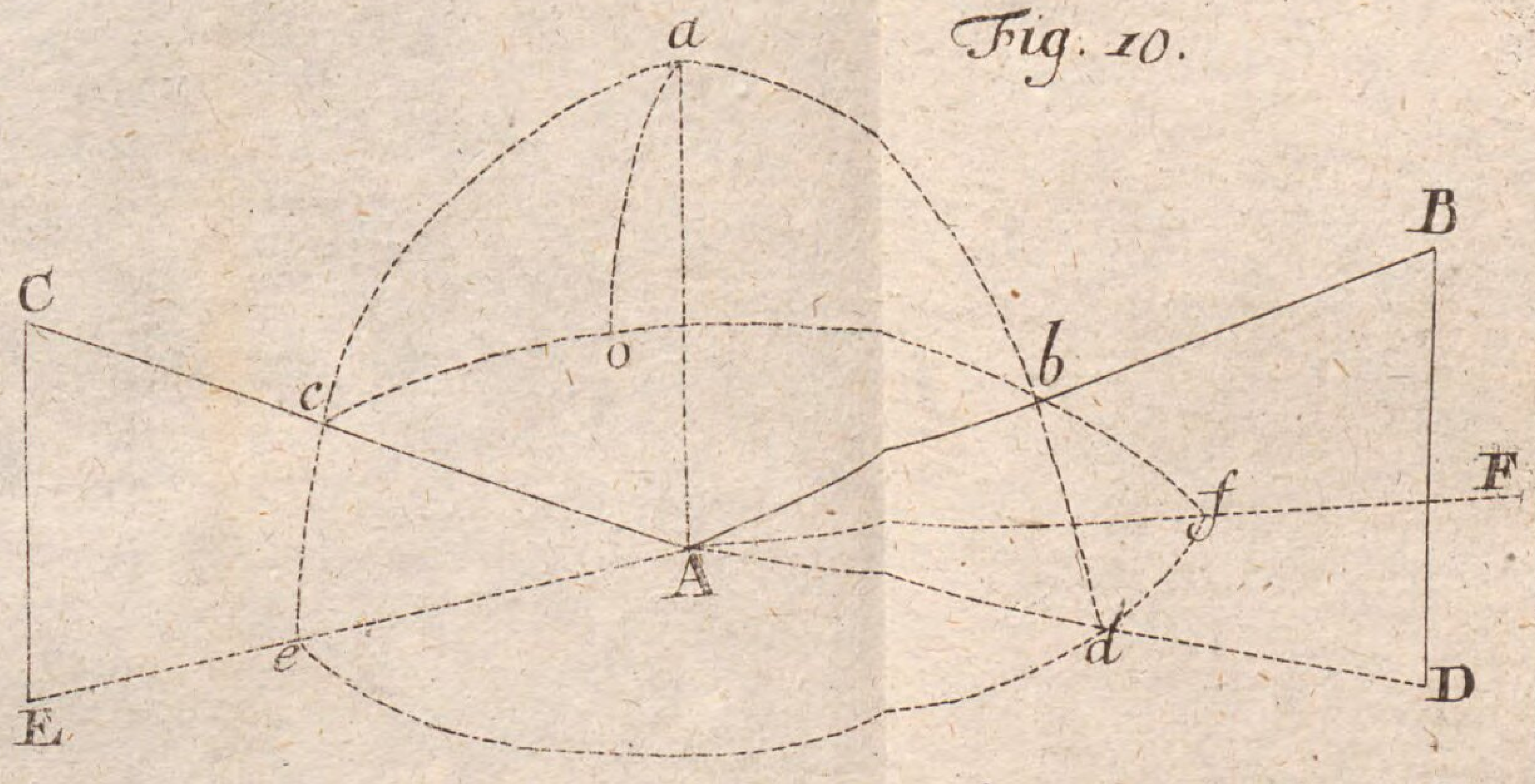


Fig. 9.

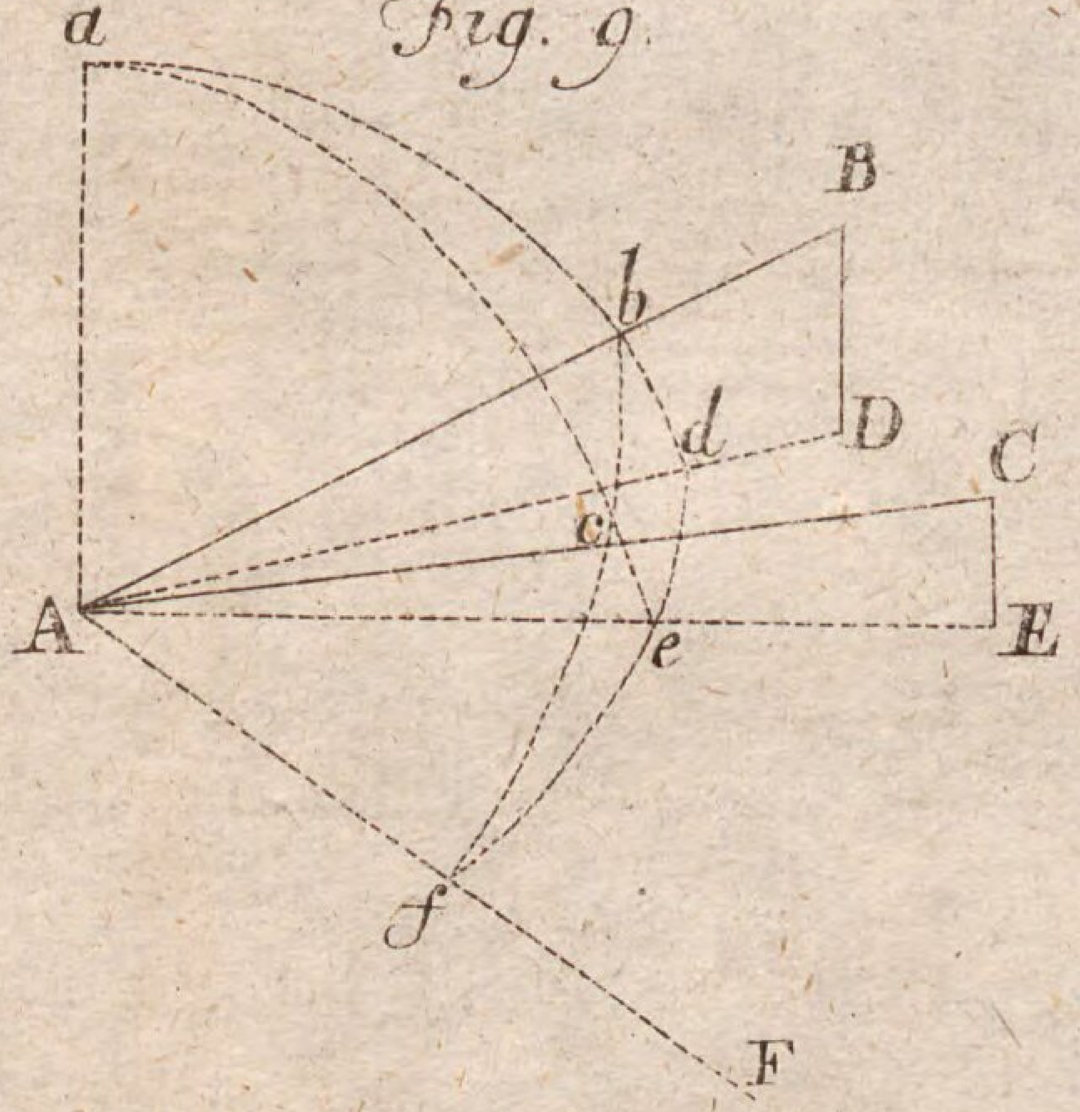


Fig. 11.

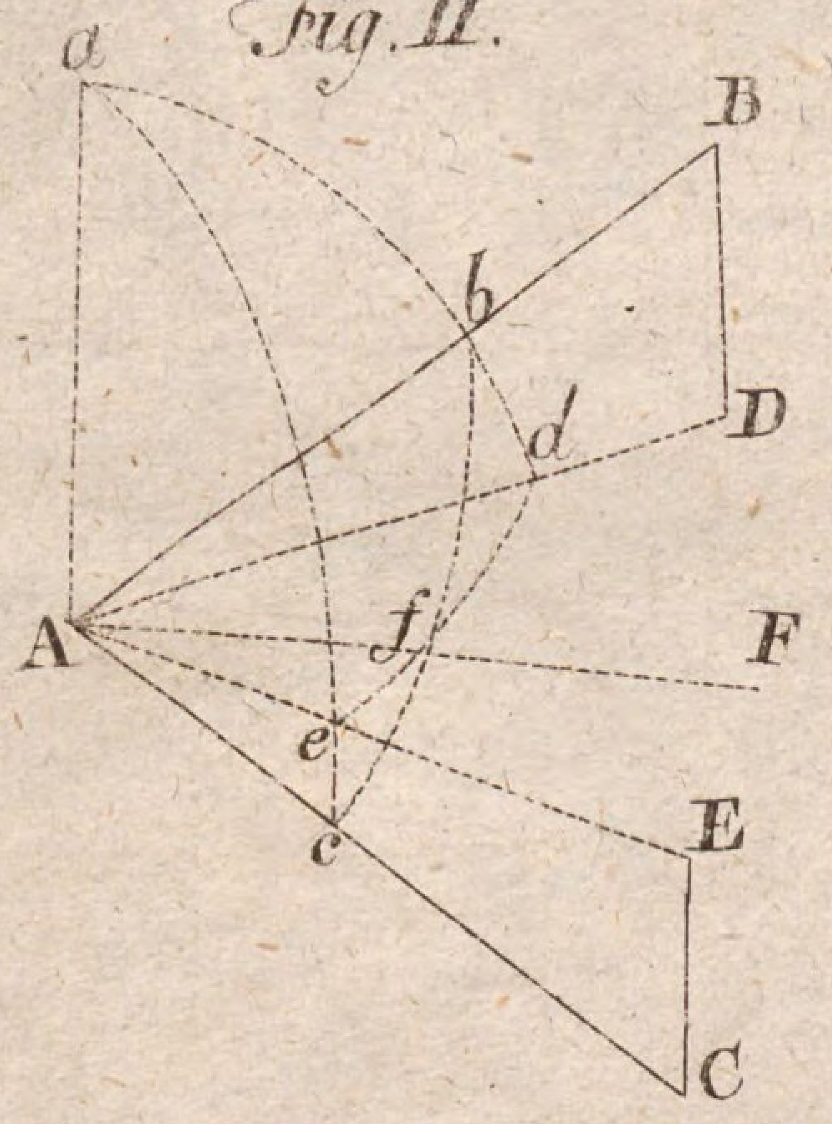
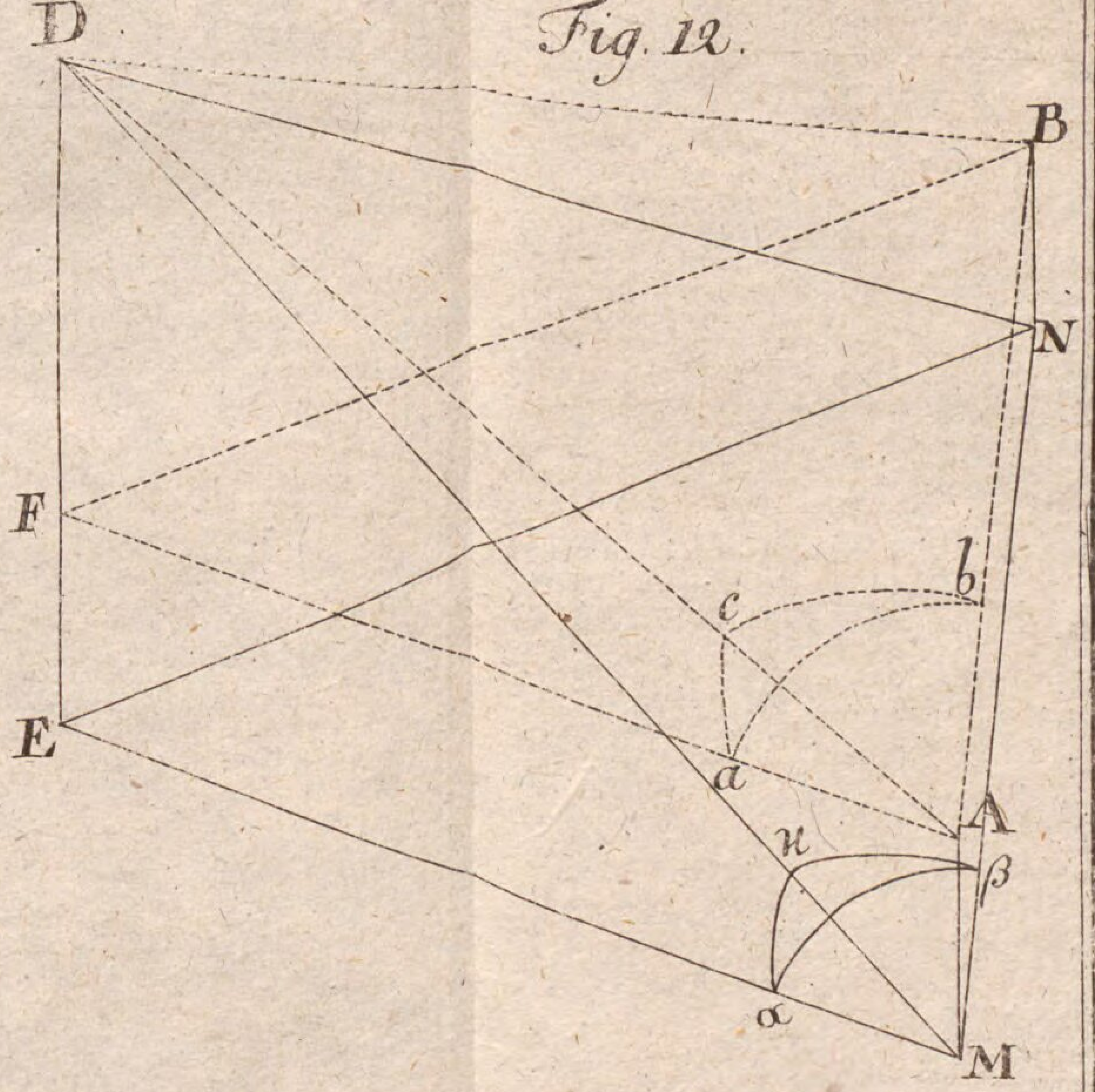
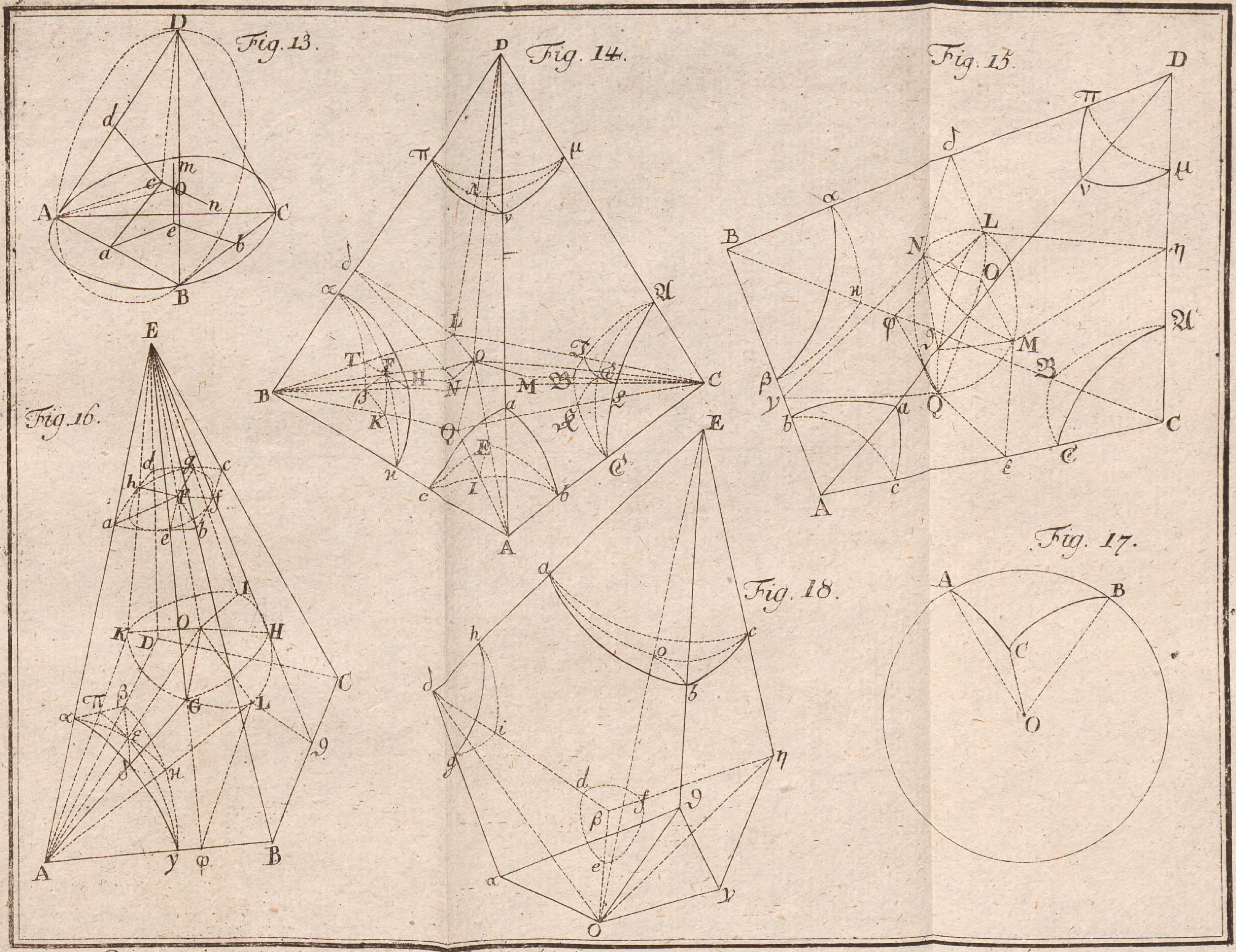


Fig. 12.

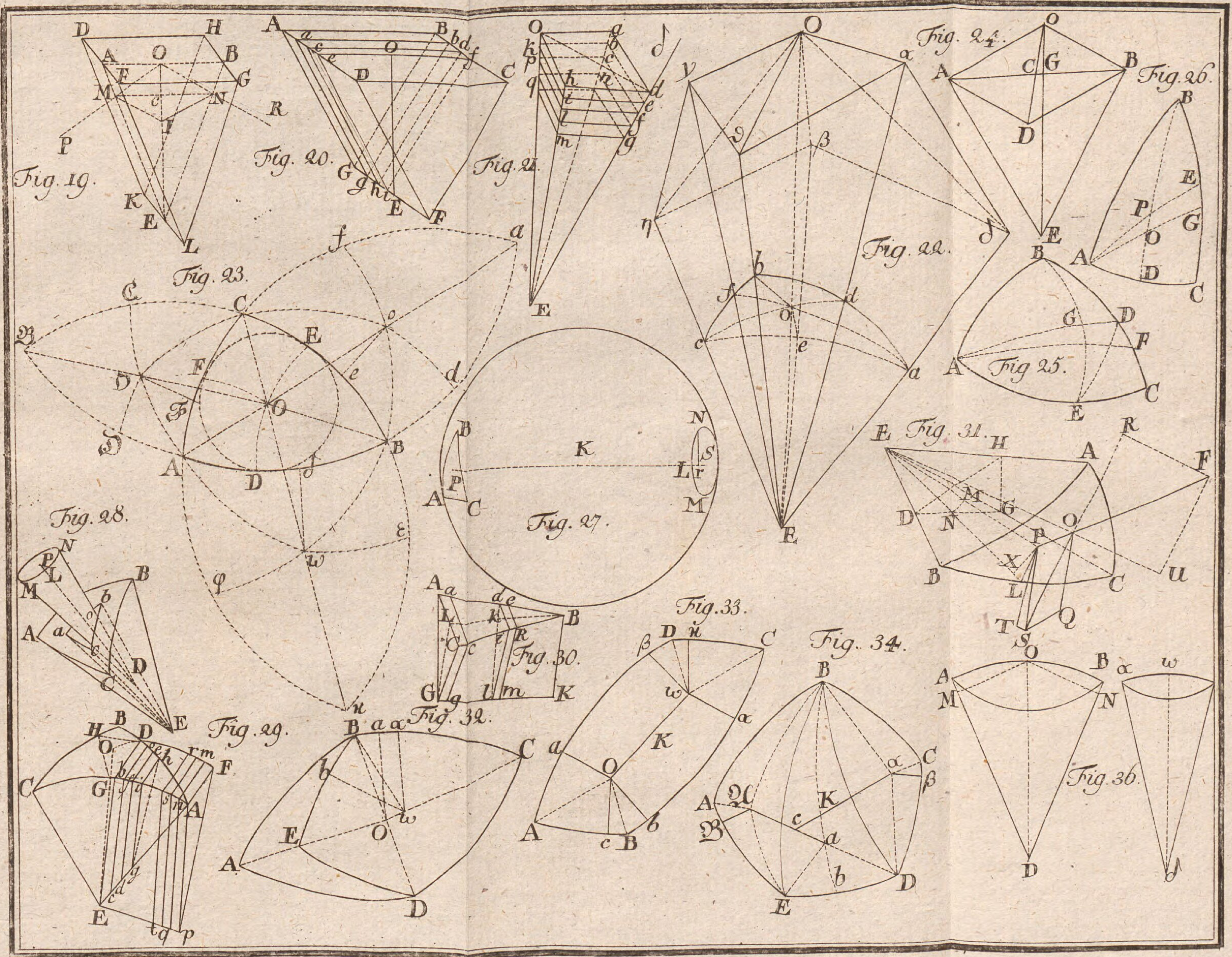


Scherf. Pyr.

Tab. III.



Tab. IV.



Scherffers Pyramidometrie.

IV.

Perspectivische Aufgaben,

durch welche

der Gebrauch des Tangentenmaaßstabes,

um sowohl gegebene Winkel nach der Perspective zu entwerfen, als auch aus den entworfenen die Objectivwinkel zu finden, erleichtert wird.

Vorbericht.

Wenn man bey perspectivischen Zeichnungen alles nach den Regeln und der Theorie verfertigen müßte, würde auch die allerstandhafteste Geduld ermüdet werden. Eine geschickte Hand bestimmt nur Hauptpunkte, das übrige entwirft sie nach einem guten Augenmaaße, welches eine lange Uebung zum öftesten rechtfertiget. Graphische Methoden, da man die Entfernung des Gegenstandes von der Tafel aus dem Einfallspunkte auf die eine, und den Hauptstraal aus dem Gesichtspunkte auf die andere Seite überträgt, haben ihre Vortheile, und ihre Beschwerden (besonders bey größeren Tafeln, und aus vielen Theilen zusammengesetzten Objecten), die man zwar nach längerer Uebung durch verschiedene kleine Kunstgriffe zu erleichtern lernt, aber nicht allezeit vermeiden kann. Wenn die zu entwerfenden Gegenstände sehr regelmäßig, als da Gebäude ins Perspectiv zu setzen sind, hat man noch darüber den Tangentenmaaßstab in der Horizontallinie sehr vortheilhaft angebracht. Allein auch bey einer mittelmäßigen Entfernung des Auges von der Tafel lassen sich die Tangenten größerer Winkel selten auftragen; und obschon in diesem Falle Hr. de la Caille, (der den Gebrauch der Winkel in der praktischen Perspective sehr anwendbar gemacht hat), eine hinläng-

liche

liche Anleitung giebt, so ist es doch sehr zu wünschen, daß für dergleichen Fälle mehrere Methoden ersonnen werden, derer sich wenigstens diejenigen bedienen können, die nebst dem Gebrauche des Transporteurs und Zirkels auch Geometrie, und Trigonometrie besitzen. Ich halte dafür, es wird manche Schwierigkeit gehoben werden, wenn man nach einer kurzen trigonometrischen Berechnung einen jeden gegebenen Objectivwinkel nach der Perspective vermittelst des Transporteurs zu entwerfen weiß. Ueberdies scheint mir, es müße auch seine Nutzbarkeit haben, wenn man hingegen aus dem nach den Regeln gemachten Entwurfe den Objectivwinkel finden kann. Denn aus gegebenen Perspectivlängen, Höhen, und Breiten die wahren nach dem Maaßstabe des Hauptstraals zu bestimmen, ist eine so geringe Aufgabe, daß ich sie als schon bekannt voraussetzen kann; für die Winkel aber auf allen Gattungen der Plane habe ich annoch keine bequeme Auflösung gesehen, die doch zu einer genauen Prüfung einer perspectivischen Zeichnung erfordert wird. Beydes nun habe ich mich durch gegenwärtige Aufgaben zu bewirken, und auf alle Plane, sie mögen eine horizontale, eine verticale, oder eine gegen den Horizont schiefe Stellung haben, anzuwenden beflissen. Der geneigte Leser wird entscheiden, ob ich mein Ziel erreicht habe, oder nicht.

I. Auf-

I. Aufgabe.

I. Es wird der Augpunkt O (1 Fig. I Taf.), der Hauptstraal OC, und eine perspectivische Linie *nc* auf dem geometrischen, oder einem mit dem Horizonte parallelen Plane gegeben; man verlangt gegen B einen perspectivischen Winkel *a*, dessen Tangente aber größer ist, als der Tangentenmaaßstab OB. 1 Fig. I Taf.

Auflösung. Es können hier verschiedene Fälle seyn; und zwar

I. Wenn *nc* nach dem Hauptpunkte O gerichtet ist, und auf der Seite B im Ansehen der Verticallinie liegt.

Man lasse aus *c* auf die Horizontallinie OB einen Perpendikel *cb* fallen. Wenn *bc* genau in eine Eintheilung des Tangentenmaaßstabes eintrifft, so weiß man schon, was im Ansehen des Hauptstraals OC, O*cb* für einen Winkel vorstelle, allhier nämlich von 30°; wäre aber der Tangentenmaaßstab noch nicht verfertigt, oder *cb* träfe in keine Abtheilung, so könnte man O*b* in eben dem verjüngten Maaßstabe nehmen, in dem der Hauptstraal gegeben wird, und setzen OC : O*b* = 1 : *tang*. φ. Wenn aber auch der Tangentenmaaßstab schon abgetheilet ist, und *cb* in eine Abtheilung genau eintrifft, so muß man dennoch *bc* in dem verjüngten Maaßstabe des Hauptstraals nehmen.

Es ist klar, daß *cm* nach der Eintheilung des Winkels *a* gerichtet seyn muß; nun aber ist 1 : *tang*. φ = OC : O*b* = OC × *tang*. φ, und wenn wir unterdessen den Eintheilungspunkt des Winkels *a*, *x* nennen, so stehet eben 1 : *tang*. *a* = OC : O*x* = OC × *tang*. *a*, und *bx* wird = OC × *tang*. *a* — OC.

$$OC \times tang.\,\varphi = OC \times \left(\frac{sin.\,a}{cos.\,a} - \frac{sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi}\right) =$$
$$\frac{OC(sin.\,a\,cos.\,\varphi - sin.\,\varphi\,cos.\,a)}{cos.\,a\,cos.\,\varphi} = \frac{OC \times sin\,(a-\varphi)}{cos.\,a\,cos.\,\varphi}.$$

Ich suche demnach den Objectivwinkel, dessen Tangente bx im Ansehen des Halbmessers cb ist, und setze: $cb : OC\,\frac{[sin.(a-\varphi)]}{cos.\,a\,cos.\,\varphi} = 1 : tang.\,bcm$, mithin suche ich $tang.\,bcm = \frac{OC}{cb} \times \frac{sin.(a-\varphi)}{cos.\,a\,cos.\,\varphi}$, und mache mit diesem den Winkel bcm vermittelst des Transporteurs gleich, so wird ncm dem Winkel a perspectivisch gleich seyn. Eine sonnenklare Sache bedarf keines Beweises nicht.

2. Beyspiel. Es sey $Ob = OC\,tang.\,30^\circ$, $Ox = OC\,tang.\,(61^\circ\ 38')$; OC gebe in dem verjüngten Maaßstabe 271 Theile, bc aber 160. Es wird also $tang.\,bcm = \frac{271}{160} \times \frac{sin.\,(61^\circ\ 38' - 30^\circ)}{cos.\,(61^\circ\ 38')\,cos.\,30} = \frac{271}{160} \times \frac{sin.\,31^\circ\ 38'}{sin.\,(28^\circ\ 22')\,sin.\,60^\circ}$.

Log. 271	=	2,4329693
Log. sin. (31° 38′)	= −	1,7197300
Summe	=	2,1526993
Log. 160	=	2,2041200
Log. sin. 28° 22′	= −	1,6767963
Log. 60°	= −	1,9375306
Summe	=	1,8184469
		2,1526993
		1,8184469
Log. tang. bcm	=	0,3342524

Dieser Tangente kommen beynahe 65° 8′ 51″ zu.

3.

3. II. Wenn $\nu\varkappa$ zwar gegen den Augpunkt geht, aber gegen A im Ansehen der Verticallinie liegt.

Man lasse wiederum auf OA einen Perpendikel $\varkappa\beta$ fallen, und suche sowohl, was für eines Winkels Tangente $O\beta$ im Ansehen des Halbmessers OC sey, als auch wie viele Theile $\varkappa\beta$ in dem verjüngten Maaßstabe enthalte. $O\beta$ sey wieder OC $tang.\ \varphi$, und $Ox = OC \times tang.\ a$, so wird $\beta x = tang.\ OC\ (tang.\ a + tang.\ \varphi)$ $= \frac{OC\ sin.\ (a + \varphi)}{cos.\ a\ cos.\ \varphi}$; und es steht $\varkappa\beta : \beta x$ $\left(= \frac{OC \times sin.\ (a + \varphi)}{cos.\ a\ cos.\ \varphi}\right) = 1 : tang.\ \beta\varkappa\mu =$ $\frac{OC}{\beta\varkappa} \times \frac{sin.\ (a + \varphi)}{cos.\ a\ cos.\ \varphi}$.

Wenn wir wiederum setzen $\varphi = 30°$, $a = 61°\ 38'$, $OC = 271$, $\varkappa\beta = 160$, so wird $tang.\ \beta\varkappa\mu =$ $\frac{271\ sin.(91°\ 38')}{160\ sin.(28°\ 22')\ sin.\ 60°} = \frac{271\ sin.(88°\ 22')}{160\ sin.(28°\ 22')\ sin.\ 60°}$.

Log. 271	=	2,4329693
Log. sin. 88° 22′	= —	1,9998235
Summe	=	2,4327928
Log. sin. 28° 22′	= —	1,6767963
Log. sin. 60°	= —	1,9375306
Log. 160	=	2,2041200
Summe	=	1,8184469
		2,4327928
		1,8184469
Log. tang. $\beta\varkappa\mu$	=	0,6143459.

Dieser Tangente gebühren 76° 20′ 25″,5 beynahe, damit der perspectivische Winkel $\nu\varkappa\mu$ 61° 38′ betrage.

4. III. Wenn Nc nicht nach O gerichtet ist, sondern nach d, und sowohl Nc, als d gegen B liegt.

Man ziehe cb auf OB senkrecht, suche die Winkel, denen im Ansehen des Halbmessers OC die Tangenten Od, Ob zukommen, wie auch die Theile bc in dem verjüngten Maaßstabe. Der perspectivische Winkel dcM soll a heißen, der Winkel der Tangente O$d = \alpha$, der Tangente O$b = \varphi$, so wird OcM $= a + \alpha$, Ox = OC $tang. (a + \alpha)$, Ob = OC $tang. \varphi$, bx = OC $tang. (a + \alpha)$ — OC $tang. \varphi$, und $bc : bx$ [= OC $(tang. (a + \alpha) - tang. \varphi)$] =

$$OC \times \left(\frac{sin. (a + \alpha - \varphi)}{cos. (a + \alpha)\ cos. \varphi}\right) = 1 : tang.\ bcM$$

$$= \frac{OC}{bc} \times \frac{sin. (a + \alpha - \varphi)}{cos. (a + \alpha)\ cos. \varphi}.$$

Wenn zum Beyspiele $a = 61° 38'$, $\alpha = 10°$, $\varphi = 30°$, OC = 271, bc = 160, wird $tang.$

$$bcM = \frac{271}{160} \times \frac{sin. (71° 38' - 30°)}{cos. (71° 38')\ cos. 30°} = \frac{271}{160} \times$$

$$\frac{sin. (41° 38')}{sin. (18° 22')\ sin. 60°};$$ sonst ist das ganze Verfahren gleich.

5. IV. Wenn Nc gegen B liegt, und durch β geht, das gegen A sich befindet.

Man suche bc, den Winkel, dem die Tangente βO, und jenen, dem die Tangente Ob zusteht; der gegebene Winkel NcM sey $= a$, jener der Tangente βO $= \alpha$, der Tangente O$b = \varphi$, so wird Ox = OC $tang. (a - \alpha)$, bx = OC $tang. (a - \alpha)$ —

$$OC\ tang. \varphi = \frac{OC\ sin. (a - \alpha - \varphi)}{cos. (a - \alpha)\ cos. \varphi},$$ und $tang.$

$$bcM = \frac{OC}{bc} \times \frac{sin. (a - \alpha - \varphi)}{cos. (a - \alpha)\ cos. \varphi}.$$

6.

6. V. Wenn P$\varkappa$ durch g geht, und sowohl P$\varkappa$, als g gegen A liegt.

Man suche wieder die Winkel der Tangenten $gO = \alpha$, $\beta O = \varphi$, wie auch $\beta\varkappa$ in dem verjüngten Maaßstabe. Der perspectivische Winkel P$\varkappa$M sey $= a$, so wird $Ox = OC \times tang. (a - \alpha)$, $O\beta = OC \times tang. \varphi$, $\beta\varkappa = OC \times (tang. (a - \alpha) + tang. \varphi)$, und $tang. \beta\varkappa M = \frac{OC}{\beta\varkappa} \times \frac{sin. (a - \alpha + \varphi)}{cos. (a - \alpha) cos. \varphi}$.

7. VI. Wenn L$\varkappa$ gegen A liegt, und gegen d auf der Seite B gerichtet ist.

In diesem Falle, wenn der Winkel der Tangente $Od = \alpha$, $\beta O = \varphi$, $dxM = a$, wird $Ox = tang. (a + \alpha) \times OC$, $O\beta = OC \times tang. \varphi$, $tang. \beta\varkappa M = \frac{OC}{\beta\varkappa} \times \frac{sin. (a + \alpha + \varphi)}{cos. (a + \alpha) cos. \varphi}$.

Es kömmt also nur auf den Ausdruck der Tangenten Ox, Ob, oder $O\beta$ an, und aus der Lage des Perpendikels bc oder βx, sieht man also gleich, ob man die Summe, oder die Differenz dieser Tangenten nehmen soll. Allein wir wollen die Aufgabe umkehren.

8. II. Aufgabe. Es wird der Augpunkt O, der Hauptstraal OC, der wahre Winkel Ocm gegeben; man fragt, wie viel Grade dieser Winkel nach der Perspective enthalte?

Auflösung. Man ziehe aus c auf die Horizontallinie den Perpendikel bc, nehme sowohl bc, als Ob in dem verjüngten Maaßstabe, nach welchem OC gegeben wird, und suche mit dem Transporteur die Winkel Ocb, bcm, und setze $bc : Ob = 1 : tang. \lambda$; item

$Ob : OC = tang. \varphi : 1$, so wird

$bc : OC = tang. \varphi : tang. \lambda$, und

$\frac{bc}{OC}$ $tang.\lambda = tang.\phi$, folglich $Ob = OC\ tang.\phi$. Der Winkel bcm sey $= a$, und der perspectivische $Ocm = y$, und es wird $bx = OC \times tang.\ y - OC \times tang.\ \phi$. Es steht also $bc : bx\ [= OC(tang.\ y - tang.\ \phi)] = 1 : tang.\ a = \frac{OC}{bc}(tang.\ y - tang.\ \phi)$.

Aus der Gleichung $tang.\ a = \frac{OC}{bc}(tang.\ y - tang.\ \phi)$ wird $\frac{bc}{OC} \times tang.\ a + tang.\ \phi = tang.\ y$. Man suche in den Sinustafeln unter den Tangenten $\frac{bc}{OC} \times tang.\ a$, und nenne den Winkel ϱ, so hat man $t\varrho + t\phi = \frac{sin.\ (\varrho + \phi)}{cos.\ \varrho \times cos.\ \phi} = tang.\ y$, und man findet den perspectivischen Winkel y.

9. Aus diesem einzigen Falle ersieht man schon, wie man sich in andern zu verhalten habe, und man darf nur in den Formeln der übrigen fünf Fälle, die wir oben angeführt haben, anstatt des gegebenen Winkels a, das y setzen, α und ϕ aber nach gegenwärtiger Auflösung als bekannt annehmen.

In dem II Falle hatten wir $tang.\ \beta\varkappa\mu = \frac{OC}{\varkappa\beta} \times (tang.\ a + tang.\ \phi)$, und nach dieser Anmerkung $tang.\ a = \frac{OC}{\varkappa\beta}(tang.\ y + tang.\ \phi)$; folglich $\frac{\varkappa\beta}{OC}\ tang.\ a - tang.\ \phi = tang.\ y$, das ist $tang.\ \varrho - tang.\ \phi = \frac{sin.\ (\varrho - \phi)}{cos.\ \varrho \times cos.\ \phi} = tang.\ y$.

Für

Für den III Fall war $tang.\ bcM = \frac{OC}{bc}(tang.\ (a + \alpha) - tang.\ \varphi)$, und es wird $\frac{bc}{OC}\ tang.\ a + tang.\ \varphi = \frac{sin.\ (\varrho + \varphi)}{cos.\ \varrho \times cos.\ \varphi} = tang.\ (y + \alpha)$; hat man $y + \alpha$, so hat man auch y, indem α bekannt ist.

Die Formel des IV Falls $tang.\ bcM = \frac{OC}{bc} \times (tang.\ (a - \alpha) - tang.\ \varphi)$ wird $\frac{bc}{OC}\ tang.\ a + tang.\ \varphi = tang.\ \varrho + tang.\ \varphi = \frac{sin.\ (\varrho + \varphi)}{cos.\ \varrho\ cos.\ \varphi} = tang.\ (y - \alpha)$. Wenn man also zu $y - \alpha$ den bekannten Winkel α hinzu giebt, bekömmt man y.

Im V Falle, allwo $tang.\ \beta\varkappa\mathfrak{M} = \frac{OC}{\beta\varkappa}(tang.\ (a - \alpha) + tang.\ \varphi)$, wird $\frac{\beta\varkappa}{OC}\ tang.\ a - tang.\ \varphi = tang.\ \varrho - tang.\ \varphi = \frac{sin.\ (\varrho - \varphi)}{cos.\ \varrho \times cos.\ \varphi} = tang.\ (y - \alpha)$.

Endlich für den VI Fall wird die Formel $tang.\ \beta\varkappa\mathfrak{M} = \frac{OC}{\beta\varkappa}\ (tang.\ (a + \alpha) + tang.\ \varphi)$, $\frac{\beta\varkappa}{OC}\ tang.\ a - tang.\ \varphi = tang.\ \varrho - tang.\ \varphi = \frac{sin.\ (\varrho - \varphi)}{cos.\ \varrho\ cos.\ \varphi} = tang.\ (y + \alpha)$.

10. **Anmerkung.** Nur ein einziger Fall scheint in der ersten Aufgabe nicht berührt zu seyn, wenn nämlich für bc der Punkt δ mehr gegen B, und für $\beta\varkappa$ der Punkt γ mehr gegen A liegt. Allein dieses macht nur

eine kleine Veränderung in dem Ausdrucke des gegebenen perspectivischen Winkels a; denn da $\delta cm = a$, wird $Ob = OC \times tang.\ \phi$, und wenn $O\delta$ die Tangente des Winkels α ist, $bx = b\delta + \delta x = OC\ (tang.\ \alpha + tang.\ (a + \alpha) - tang.\ \phi - tang.\ \alpha) = OC \times (tang.\ (a + \alpha) - tang.\ \phi)$. Für den Winkel $\gamma\varkappa\mu$ wird $\beta O = OC \times tang.\ \phi$, $O\varkappa = OC\ [tang.\ (a - \alpha)]$, und $\beta x = OC\ (tang.\ (a - \alpha) + tang.\ \phi)$

Wenn man in dem ersten Falle annimmt $a = 65^\circ\ 8'\ 51''$, $\phi = 30^\circ$, findet man $y = 61^\circ\ 37'\ 56''$ beynahe, daß der Fehler kaum $4''$ beträgt, welche Genauigkeit für perspectivische Entwürfe überflüßig ist.

Allein die sich auf perspectivische Zeichnungen verlegen, sind gemeiniglich keine großen Liebhaber der Berechnungen, sondern suchen die Winkel vielmehr graphisch zu entwerfen; und es läßt sich auch dieses in sehr vielen Umständen auf folgende Art bewirken.

2 Fig. I Taf. II. III. Aufgabe. Es wird der Augpunkt O (2 Fig. I Taf.), der Hauptstraal OC, und der perspectivische Punkt B gegeben; man verlangt nach einer Eintheilung x des Tangentenmaaßstabes aus B eine Linie zu ziehen, welcher Eintheilungspunkt in dem Maaßstabe nicht mehr enthalten wird.

Auflösung. Es bedeute Ox die Tangente des Winkels a, zum Beyspiele $64^\circ\ 30'$. Man mache mit dem Transporteur am Ende des Tangentenmaaßstabes L den Winkel $O\alpha c$ mit dem Complemente des gegebenen a gleich, in unserem Falle $= 25^\circ\ 30'$, also, daß αc an die Verticallinie OC stosse. Aus O ziehe man die Linie OB, verbinde B mit C, und mache cb mit CB parallel. Wenn man aus b zu α eine Linie zieht, und Ba mit $b\alpha$ parallel macht, wird OBa dem gegebenen Winkel a nach der Perspective gleich seyn. Denn es ist einleuchtend, daß diese ganze Vorrichtung nichts anders

ist,

ist, als eine Verjüngerung der ganzen Tafel. Man nimmt einen kleineren Hauptstraal O*c*, und für diese ist O*α* die Tangente des Winkels *a*. Durch die ähnlichen Dreyecke OCB, O*cb* findet man für die kleinere Tafel den Punkt *b*, der eben die Lage im Ansehen des Hauptstraales O*c*, und des Tangentenmaaßstabes O*α* hat, welche B gegen OC und O*x* hat; folglich müßen bey ähnlichen Figuren die entsprechenden Linien *bα*, B*ax* parallel seyn.

12. I. **Anmerkung.** Wir haben die Linie O*α* so groß genommen, als es die Tafel zuläßt. Denn wie kleiner die Figuren sind, desto unrichtiger sind die graphischen Bestimmungen.

13. II. **Anmerkung.** Wenn *x* der Accidentalpunkt, im welchen zwey Parallellinien aus B und D müßten zusammenstoßen, wäre, so hätte man noch einen Punkt *d* in der kleineren Tafel, der dem gegebenen D entspräche, durch die ähnlichen Dreyecke OCD, O*cd* zu bestimmen, und DD müßte mit *dα* parallel gezogen werden.

14. III. **Anmerkung.** Wenn die Tafel kleiner wäre, als daß man den Hauptstraal OC in die Verticallinie übertragen könnte, so wäre es genug, wenn man OK $= \frac{1}{2}$OC, oder auch $= \frac{1}{3}$OC nähme, wie auch O*k* $= \frac{1}{2}$O*c*, oder $= \frac{1}{3}$O*c*, und müßte man *kb* mit KB, wie auch *kd* mit KD parallel ziehen, um die Punkte *b*, *d* zu bestimmen.

Wir wollen itzt eben diese Aufgaben auf jene Winkel anwenden, welche die Neigung gerader Linien gegen den Horizont ausdrücken.

15. IV. **Aufgabe.** Die Linie *mc* liegt in einer mit dem Verticalplane (in dem nämlich das Aug ist, und den man den Meridian des Auges nennen kann) parallelen Fläche (3 Fig. I Taf.); sie soll gegen den 3 Fig. I Taf.

Horizont (oder einen mit dem Horizonte parallelen Plan) unter einem gegebenen Winkel a geneigt seyn, den man aber in der Verticallinie nicht anzeigen kann. Es versteht sich, daß der Hauptstraal, und der Augpunkt O gegeben werden.

Auflösung. Aus den optischen Gründen der Methode die Tangenten der Winkel zu gebrauchen ist bekannt, daß der Meridian des Auges VOR vom O angefangen auf- und abwärts eben diese Eintheilung für die Neigung der Linien gegen den Horizont erfordere, die man in der Horizontallinie macht; und daß man die Tangenten OV für jene Linien gebrauche, die mit dem Horizonte gegen das Aug einen stumpfen Winkel machen, OR aber für diejenigen, die mit dem Horizonte gegen das Aug einen gespitzten Winkel enthalten. Wir wollen setzen, cm sey eine der ersteren. Man ziehe Oc, so wird diese die Linie auf dem Horizonte seyn, die mit cm den Winkel a vorstellet. Die Eintheilung x für den Winkel a sey nicht mehr in OV enthalten, und wir nennen also die Tangente für den Halbmesser OC, (welcher allemal der Tangente 45° in der Horizontallinie gleich ist) $= \text{OC} \times tang.\ a$. Aus c ziehe man auf OR einen Perpendikel cl, und nehme erstens lc in den Theilen des Maaßstabes, im welchen der Hauptstraal OC gegeben wird; zweytens suche man, wessen Winkels Tangente Ol für den Halbmesser OC sey, und diesen setze man $= \varphi$, so wird $\text{O}l = \text{OC} \times tang.\ \varphi$. Dann steht $lc : lx \left[= \text{OC}\ (tang.\ a + tang.\ \varphi)\right] = \left(\frac{\text{OC} \times fin.\ (a + \varphi)}{cof.\ a \times cof.\ \varphi}\right) = 1 : tang.\ mcl = \frac{\text{OC}}{lc} \times \frac{fin.\ (a + \varphi)}{cof.\ a \times cof.\ \varphi}$.

Zum

Zum Beyspiele sey $a = 65^\circ$, $\varphi = 25^\circ$, $OC = 271$, $lc = 160$, so wird $tang.\, lcm = \frac{271}{160} \times \frac{\sin. 90^\circ}{\sin. 25^\circ \times \sin. 65^\circ}$, und man findet lcm beynahe $77^\circ\ 15'\ 27''$.

16. I. Zusatz. Wenn der Perspectivpunkt $\varkappa$ gegeben wäre, und δO die Tangente des Winkels φ für den Halbmesser OC, so wäre $tang.\, \delta\varkappa\mu = \frac{OC}{\delta\varkappa} \times (tang.\, a - tang.\, \varphi) = \frac{OC}{\delta\varkappa} \times \frac{\sin.\,(a - \varphi)}{\cos.\, a \times \cos.\, \varphi}$, und der perspectivische Winkel $O\varkappa\mu$ würde $= a$.

17. II. Zusatz. Sollte der gespitzte Winkel OcM gegen das Aug gerichtet seyn, $lO = OC \times tang.\, \varphi$, $OcM = a$, würde $tang.\, lcM = \frac{OC}{lc} \times (tang.\, a - tang.\, \varphi) = \frac{OC}{lc} \times \frac{\sin.\,(a - \varphi)}{\cos.\, a \times \cos.\, \varphi}$.

Eben also, wenn der perspectivische Winkel $O\varkappa\mathfrak{M} = a$, $O\delta = OC \times tang.\, \varphi$, wird $tang.\, \delta\varkappa\mathfrak{M} = \frac{OC}{\delta\varkappa} \times \frac{\sin.\,(a + \varphi)}{\cos.\, a \times \cos.\, \varphi}$.

18 III. Zusatz. Man sieht schon, daß wenn man die wahren Größen der Winkel Ocm, $O\varkappa\mu$ ꝛc. giebt, und vermittelst des Transporteurs die Winkel lcm, $\delta\varkappa\mu$, lcO, $\delta\varkappa O$ mißt, um die perspectivischen zu finden, man nur in den angeführten Formeln die Winkel lcm, $\delta\varkappa\mu$, a nennen darf; lcO, $\delta\varkappa O$ aber $= \varphi$, und Ocm, $O\varkappa\mu$ $= y$. Aus den Gleichungen, die hieraus entstehen,

wenn man $\frac{lc}{OC} \times tang.\ a = tang.\ g$ setzet, findet man allezeit *tang. y.*

19. Anmerkung. Es ist übrigens einleuchtend, daß man in einer jeden Fläche, die mit dem Verticalplane parallel ist, eben also durch die Tangenten in der Verticallinie alle Winkel entwerfen kann, wie in einem Horizontalplane vermittelst der Tangenten in der Horizontallinie. Allein die Verticalplane sind sehr oft nicht mit dem Meridiane des Auges parallel, sondern haben gegen ihn eine schiefe Neigung. Diese Neigung, oder Abweichung von der Parallellage kann man das Azimuth nennen. Zum Beyspiele, wenn ein Plan, in welchem eine gegen den Horizont geneigte Linie liegt, gegen A von dem Verticalplane des Auges um 35° abweicht, wird dieser Plan ein Azimuth von 35° haben. Man fragt also, wie in einem dergleichen Plane die Neigung drr Linie gegen den Horizont zu entwerfen sey.

20. V. Aufgabe. Den Maaßstab der Tangenten für einen Verticalplan, dessen Azimuth gegeben wird, zu verfertigen, und zu berechnen, wenn dazu der Augpunkt O, und der Hauptstraal OC gegeben wird.

Auflösung. Es ist klar, daß wenn man zum Beyspiele das gegebene Azimuth OG in die Verticallinie aus O in I überträgt, für die Eintheilung der Tangenten in der Linie FGH, der Halbmesser CI müße gebraucht werden, indem, so fern man den Hauptstrahl OC auf dem Plane der Tafel in O perpendikulär aufrichtete, und aus C auf G eine Linie zöge, diese mit CI gleich seyn würde. Man übertrage also IC in GK, und theile aus dem Mittelpunkte K eben also GF, GH, wie man aus C die Theile in OV, OR, oder (wenn OR = OC) in OG, OB die Theile aus R gesucht hat.

Wenn

Wenn man nur wenige Tangenten in FG, GH, gebrauchte, und für dieselben die Eintheilung in der Horizontallinie AB schon gemacht wäre, zum Beyspiele, man wollte nur die Tangente von 30° haben, so nehme man O, 30° in der Horizontallinie, und übertrage sie in OL in die Verticallinie, den Hauptstraal aber in die Horizontallinie in OC, ziehe LC, und mache Kλ mit CL parallel, so wird Gλ die Tangente von 30° für den Halbmesser GK.

Wenn man die wirkliche Eintheilung der Linie FGH nicht machen will, sondern nur den Ausdruck der Tangente eines gegebenen Winkels *a* verlangt, so ist klar, daß OC : CI (oder GK) = *cos. Azimuthi* : 1; mithin wenn man das Azimuth = A setzet, wird $GK = \frac{OC}{cos.\,A}$. Und wenn Gλ die Tangente des gegebenen Winkels *a* ist, steht wiederum 1 : *tang. a* = GK $\left(= \frac{OC}{cos.\,A}\right)$: Gλ, und Gλ wird $\frac{OC \times tang.\,a}{cos.\,A}$.

Wer diese Auflösung recht begreift, wird in folgenden Aufgaben keine Beschwerde finden.

21. VI. Aufgabe. Die Linie P*q* liegt in einem auf den Horizont senkrechten Plane, dessen Azimuth gegeben wird; man verlangt den gegen den Horizont gegebenen Neigungswinkel *a* nach der Perspective zu entwerfen.

Auflösung. Man ziehe aus P auf den Vertical FGH des Azimuths OG einen Perpendikel P*p*. Man nehme sowohl G*p*, als P*p* in den Theilen des Hauptstraales OC, und setze, (wenn das Azimuth OG = A ist) : GK $\left(= \frac{OC}{cos.\,A}\right)$: G*p* = 1 : *tang.* φ =

G*p*

$\frac{Gp \times cos. A}{OC}$, und suche den Winkel ϕ, wenn nicht Pp schon in eine gemachte Eintheilung der Linie GH oder GF eintrifft. Die Tangente für den Halbmesser GK des gegebenen Winkels a sey $Gx = \frac{OC \times tang.\ a}{cos.\ A}$, so wird die Tangente pPq des wahren Winkels $= \frac{OC}{pP \times cos.\ A} \times (tang.\ a + tang.\ \phi) = \frac{OC}{pP \times cos.\ A} \times \frac{sin.\ (a \times \phi)}{cos.\ a \times cos.\ \phi}$, und der optische Winkel $GPq = a$.

Wenn wir $a = 55°$, $\phi = 15°$, $OC = 271$, $Pp = 258$ annehmen, wird $tang.\ pPq = tang.\ (65° 18' 26'')$ beynahe.

Wenn der gespitzte Winkel gegen das Aug gerichtet wäre, müßte man nehmen $tang.\ pPQ = \frac{OC}{pP\ cos.\ A} \times \frac{sin.\ (a - \phi)}{cos.\ a \times cos.\ \phi}$, wie man aus dem vorigen leicht einsieht.

22. Anmerkung. Der III Zusatz der vorigen Aufgabe findet auch allhier Platz, wenn man sich nur des Halbmessers $\frac{OC}{cos.\ A}$ bedient. Allein, was wäre zu thun, wenn das Azimuth so groß wäre, daß man FGH nicht mehr auf der Tafel vorstellen könnte? Die Frage wollen wir in folgender Aufgabe beantworten.

23. VII. Aufgabe. Wenn das Azimuth in der Horizontallinie nicht kann genommen werden, aus dem Perspectivpunkte P eine Linie zu ziehen, die unter dem gegebenen Winkel gegen den Horizont geneigt ist.

Auflösung. Die ganze Schwierigkeit kömmt hier auf einen richtigen Ausdruck der Linie Pp an. Man ziehe die Perpendikel Pb, $P\vartheta$ auf die Horizontal- und Verticallinie. Wenn man $P\vartheta = Ob$ aus dem verjüngten Maaßstabe nimmt, in dem man den Hauptstraal OC hat, und setzet $OC : Ob$, oder $P\vartheta = 1 : tang.\ \pi$, so weiß man den Winkel π, dessen Tangente $P\vartheta$ ist, für den Halbmesser OC, und demnach $Ob = P\vartheta = OC \times tang.\ \pi$. Gleichfalls wird das Azimuth $OG = A$ gegeben, folglich ist $OG = OC \times tang.\ A$, und $Pp = bG = OC\,(tang.\ A + tang.\ \pi) = \dfrac{OC \times sin.\ (A + \pi)}{cos.\ A \times cos.\ \pi}$.

Wenn der Perspectivpunkt π gegen A gegeben wäre, müßte man eben also $\beta O = \pi\vartheta = OC \times tang.\ \pi$ suchen, und der Ausdruck der Linie πp wäre $\dfrac{OC \times sin.\ (A - \pi)}{cos.\ A \times cos.\ \pi}$.

Was $bP = \beta\pi = Gp$ anbetrifft, muß man $bP = O\vartheta$ in eben den Theilen suchen, in denen man $GK = \dfrac{OC}{cos.\ A}$ hat, und setzen $\dfrac{OC}{cos.\ A} : O\vartheta = 1 : tang\ \varphi$, und $O\vartheta = \dfrac{OC \times tang.\ \varphi}{cos.\ A}$.

Aus diesem wird $tang.\ \vartheta Pq = \dfrac{OC}{cos.\ A} \times \dfrac{sin.\ (A + \varphi)}{cos.\ A \times cos.\ \varphi} \times \dfrac{cos.\ A \times cos.\ \pi}{OC \times sin.\ (A + \pi)} = \dfrac{sin.\ (A + \varphi)\ cos.\ \pi}{sin.\ (A + \pi)\ cos.\ (A \times cos.\ \varphi)}$.

Für den Perspectivpunkt π aber wäre $tang.\ \nu\pi\varphi = \dfrac{sin.\ (A + \varphi)\ cos.\ \pi}{sin.\ (A - \pi)\ cos.\ A \times cos.\ \varphi}$. Wenn endlich die

Punk-

Punkte P und π höher, denn die Horizontallinie lägen, dürfte man in diesen Formeln nur $- \phi$ anstatt $+ \phi$ nehmen.

24. VIII. Aufgabe. Die Neigung einer Linie gegen den Horizont graphisch zu entwerfen, wenn sie in einem Verticalplane liegt.

Auflösung. I. Wenn der Verticalplan mit dem
4 Fig. I Taf. Meridiane des Auges parallel ist. Es sey VO (4 Fig. I Taf.) der Meridian des Auges, O der Augpunkt, OC der Hauptstraal, B der Perspectivpunkt, der Neigungswinkel gegen den Horizont $= a$. Man nehme in dem Meridiane den höchsten Punkt V, so viel der Raum der Tafel zuläßt; errichte bey V den Winkel OV*c* dem Complemente des *a* gleich, ziehe CB, OB, und *cb* mit CB parallel, so hat man den Punkt *b*, der in einer ähnlichen Figur dem B entspricht; und wenn man B*m* mit *b*V parallel zieht, so haben diese Linien in beyden Figuren die gegebene Neigung.

II. Wenn der Verticalplan ein gegebenes Azimuth $=$ A hat.

Das Azimuth A sey OG; die Neigung gegen den Horizont $= a$. Man nehme wiederum den höchsten Punkt F des Verticals, der durch G geht, und mache den Winkel GFx mit $90° - a$ gleich. Aus dem Maaßstabe des Hauptstraals OC nehme man $\frac{OC}{cos.\ A}$, oder übertrage OG in OI, und nehme die Hypotenuse IC, und diese übertrage man wieder aus G in K; ziehe, (wenn D der Perspectivpunkt ist) KD, GD; und xd mit KD parallel. D*f* mit *d*F parallel ist die gesuchte Linie.

III. Wenn das Azimuth in der Tafel nicht kann genommen werden.

Man

Man nehme in diesem Falle ein so großes Azimuth, als es die Tafel zuläßt, zum Beyspiele Og; übertrage den Halbmesser für das wahre Azimuth IC = GK aus g in $\mathfrak{K}$. Um aber dieses wahre Azimuth, und den Halbmesser GK zu finden, nehme man den Hauptstraal OC entweder auf der Tafel selbst, wenn es der Raum zuläßt, oder auf einem besonderen Papiere, errichte in C den Winkel des Azimuths A, wie auch OI auf OC in O senkrecht, so wird OI das wahre Azimuth, IC der gehörige Halbmesser seyn. Aus O übertrage man in L das angenommene Azimuth Og, so wird LI = gG der Unterschied der Azimuthe seyn. Man mache $\mathfrak{K}$K = IL, ziehe KD auf den gegebenen Perspectivpunkt D, und $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$ mit KD gleich und parallel. Man verbinde g mit $\mathfrak{D}$, und nachdem man den Winkel $g\mathfrak{F}\lambda$ = $90^\circ - a$ gemacht hat, ziehe man $\lambda\delta$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$ parallel. Die Linie Df mit $\delta\mathfrak{F}$ parallel giebt den gesuchten Winkel.

Der ganze Beweis besteht in der Gleichheit, und Aehnlichkeit der Figuren $FG\varkappa$, $\mathfrak{F}g\lambda$, FGd, $\mathfrak{F}g\delta$; $Gd\varkappa$, $g\delta\lambda$; GDK, $g\mathfrak{D}\mathfrak{K}$; mithin wenn Df mit dF parallel seyn muß, muß sie auch mit $\delta\mathfrak{F}$ parallel seyn.

25. Anmerkung. Wenn die Tafel kleiner wäre, als daß man die ganzen Halbmesser OC, GK, $g\mathfrak{K}$ auftragen könnte, um die Punkte b, d, δ zu bestimmen, so wäre es nach der III Anmerkung zur III Aufgabe genug, wenn man derer Hälfte, wie auch die Hälfte der Linien Oc, $G\varkappa$, $g\lambda$ nähme, wie ein jeder leicht einsieht.

26. Wir haben bisher nur die mit dem Horizonte parallelen Flächen, und jene betrachtet, die auf den Horizont senkrecht stehen; in optischen Zeichnungen kommen auch Plane vor, die sowohl gegen den Horizont, als auch gegen den Meridian des Auges eine gegebene Neigung haben, und man kann eben fordern, daß man

auf

auf einem dergleichen Plane den Entwurf eines gegebenen Winkels mache. Und da ich hier nicht die Perspective vortrage, sondern nur den Gebrauch des Tangentenmaaßstabes in einigen Fällen zu erleichtern suche, setze ich voraus, daß ein besagter Maaßen schiefer Plan auf der Tafel schon richtig entworfen sey. Wie man aber darauf einen gegebenen Winkel vorstellen soll, werde ich in folgenden Aufgaben zeigen.

5 Fig. I Taf. 27. IX. Aufgabe. KEFH (5 Fig. I Taf.) sey der Entwurf eines rechtwinklichten Viereckes, dessen Seiten EF, KH mit dem Plane der Tafel parallel sind, und gegen den Horizont unter dem Winkel KHG = EFL geneigt; man verlangt aus dem Perspectivpunkte *b* eine Linie *bc* zu ziehen, die mit O*b* einen gegebenen Winkel *a* nach der Perspective macht.

Auflösung. Es ist einleuchtend, daß wenn der Hauptstraal OC in O auf den Plan der Tafel perpendikulär steht, er sowohl mit der Horizontallinie AB, als mit DOR (die mit KH durch O parallel gezogen wird) einen rechten Winkel macht, und daß diese einen großen Cirkel der Sphäre bedeutet, in dessen Plane die Fläche KEFH liegt. Man kann also diesen Entwurf des Cirkels mit eben so gutem Grunde als den Horizont des Auges ansehen, wenn desselben Verticallinie auf den Plan KEFH senkrecht steht, oder (welches eben so viel ist), wenn der Meridian des Auges PO in ZO sich verändert, und durch eine auf DR perpendikuläre Linie vorgestellt wird. Aus diesem folgt erstens, daß für den Maaßstab der Tangenten der Winkel, die auf dem Plane KEFH zu entwerfen sind, man nur DR als die Horizontallinie anzusehen habe, und zweytens daß, indem der vorige Augpunkt O, und Hauptstraal OC unverändert verbleiben, die Theile in DOR die nämlichen zu machen sind, die man sonst in der wahren Horizon-

tallinie

tallinie AOB macht. Wenn also Ob mit einer Linie einen Winkel zum Beyspiele von 30°, dessen Tangente O, 30° man hat, machen sollte, wäre es genug, wenn man aus b eine Linie nach der Eintheilung 30° zöge. Wir wollen aber setzen, der Winkel sey zu groß, daß man seine Tangente auf die Tafel nicht auftragen könne.

Man lasse auf DR einen Perpendikel bg fallen, suche, was für eines Winkels Tangente Og zum Halbmesser OC sey, und diesen nenne man φ, so wird $Og = OC \times tang. \varphi$; die Tangente des gegebenen Winkels a, oder Ox aber $= OC \times tang.\ a$. Man suche auch aus dem verjüngten Maaßstabe bg, und man hat $tang.\ gbm =$

$$\frac{OC}{bg}(tang.\ a + tang.\ \varphi) = \frac{OC}{bg} \times \frac{sin.\ (a + \varphi)}{cos.\ a \times cos.\ \varphi}.$$

Aus diesem erhellet, daß für einen Plan, dessen zwey Seiten mit der Tafel parallel, die andern zwey aber auf dieselbe senkrecht sind, nicht der geringste Unterschied von der I. II. und III. Aufgabe sey, nur daß man die Eintheilung der Tangenten in DR machen müße.

28. X. Aufgabe. KEFH (6 Fig. I Taf.) stellet ein rechtwinklichtes Viereck vor, dessen Seiten HK, FE mit dem Horizonte parallel sind; KE, HF aber gegen denselben unter einen gegebenen Winkel DHB geneigt, für den auch das Azimuth OB, nebst dem Augpunkte O, und dem Hauptstraale OC gegeben wird. Man verlangt auf die Perspectivlinie ab eine andere zu ziehen, daß der Winkel abc dem gegebenen a gleich sey. 6 Fig. I Taf.

Auflösung. Wenn der Entwurf des schiefen Plans nach der Perspective richtig ist, muß sowohl KHF, als KHG (es ist aber KHGL der orthographische Entwurf des Plans KEFH auf dem Horizontalplane) einen rechten Winkel vorstellen. Wenn man demnach den ent-

worfenen Plan bis an die Himmelssphäre verlängert, muß DA den Durchschnitt des Cirkels entwerfen, in dessen Plane KHFE liegt; die Seite HF aber, oder vielmehr HD, wächst immer ab, bis sie in A verschwindet, und DA stellet einen Quadranten vor. Es wird nun gefragt, nach was für einem Halbmesser AD müße in die Tangenten eingetheilt werden, und wo der Anfang der Eintheilung zu machen sey, wenn man sich vorstellet, der Hauptstraal OC werde auf die Tafel in O senkrecht aufgerichtet. Man ziehe aus O auf AD einen Perpendikel OV, so wird der Hauptstraal auf diesen senkrecht stehen, und wenn man aus V auf das Aug eine Linie zieht, so ist auch diese auf AD in V senkrecht, und der Halbmesser für die Eintheilung wird $= \sqrt{OC^2 + OV^2}$, der Anfang aber in V seyn.

Denn da die Tangente von 90° unendlich ist, ist es nicht möglich, daß wenn in AD 90 Grade enthalten sind, der Anfang der Eintheilung entweder in A, oder in D, viel weniger aber außer AD sey; der Hauptstraal also, der immer auf den Anfang der Eintheilung senkrecht fällt, muß mit zwey Theilen der Linie AD, als mit zweyen Tangenten, zwey Winkel machen, die zusammen 90° enthalten. Ich setze unterdessen, die Theile sind AV, VD, so muß der Hauptstraal nothwendig mit $\sqrt{AV \times VD}$ gleich seyn, also, daß er zwischen AV und VD die mittlere Proportionallinie sey. Aus eben dieser Ursache ist $\sqrt{AO \times OB} = OC$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ADB, AOV steht $AD : AB = AO : AV = \frac{AO \times AB}{AD}$, mithin wird $VD = AD - AV = \frac{AD^2 - AO \times AB}{AD}$,

und

und $AV \times VD = \frac{AO \times AB}{AD} \times \left(\frac{AD^2 - AO \times AB}{AD} \right)$
$= AO \times AB - \frac{AO^2 \times AB^2}{AD^2}$. Wir haben aber gehabt $\frac{AO \times AB}{AD} = AV$, folglich wird $AV \times VD = AO \times AB = AV^2$. Nun ist $AO \times OB = AO \times (AO + OB) = AO^2 + AO \times OB$, und es wird $AV \times VD = AO^2 - AV^2 + AO \times OB = OV^2 + OC^2$, oder $\sqrt{AV \times VD} = \sqrt{OC^2 + OV^2}$, wie wir den Hauptstraal für AD bestimmt haben. Daß aber OV auf AD senkrecht fallen müße, und $AO^2 - AV^2 = OV^2$ seyn, erhellet daraus, daß im widrigen Falle der Hauptstraal auf die Linie AD nicht könnte senkrecht stehen.

Es ist nur übrig, daß man wisse, zu was für einen Winkel die Tangenten VA, VD nach dem Halbmesser $\sqrt{OC^2 + OV^2}$ gerechnet, gehören; und wenn man OV, AV, VD in eben dem Maaßstabe nimmt, im welchen man OC hat, so steht $\sqrt{OC^2 + OV^2}$ (=VR): $AV = 1 : tang\ \lambda$. Indem aber AHD ein rechter Winkel ist, muß VD die Tangente des Winkels $90^\circ - \lambda$ seyn.

Man begehrt zum Beyspiele, der Winkel *abc* soll $= 75^\circ$ seyn. Man verlängere *ba* bis in Q; suche, wessen Winkels Tangente VQ nach dem Halbmesser VR sey, und man finde denselben $= 55^\circ$. Man ziehe also *bc* nach der Eintheilung 20° gegen D, so wird der perspectivische Winkel *abc* 75° enthalten.

29. I. Anmerkung. Zur Bestimmung des Halbmessers RV, und der Eintheilung der Linie AD, haben wir vorausgesetzt, daß KHG, KHF rechte Winkel sind.

Es kann aber auch der Entwurf eines andern Plans, zum Beyspiele eines Dreyeckes NMK, gegeben werden
7 Fig. I Taf. (7 Fig. I Taf.), dessen nur ein Winkel K auf den Horizont stößt, und die Seite KN das gegebene Azimuth OB, und die Neigung des ganzen Planes gegen den Horizont DKB anzeigt. In diesem Falle ziehe man aus K auf der Horizontalfläche eine andere Linie KA, die mit BK einen rechten Winkel macht. Wenn man aus D auf einen beliebigen Punkt H der Linie KA eine Linie DH, und aus N, oder was immer für einem Punkte E der Linie DK eine andere nach A zieht, die die vorige DH in F schneidet, so hat man ein rechtwinklichtes Viereck EFHK in eben dem Plane, im welchen NMK liegt, und man kann nach dieser Aufgabe sowohl den Halbmesser $\sqrt{OC^2 + OV^2}$, als den Anfang der Eintheilung V der Linie DA finden.

30. II. Anmerkung. Es wäre überflüßig, wenn ich umständlich erklären wollte, wie man aus einem gegebenen Perspectivpunkte *a* auf diesem Plane eine Linie gegen A ziehen müße, nach einer Eintheilung, die in der Linie VA nicht kann vorgestellt werden. Denn, wenn man aus *a* auf VA eine senkrechte Linie *ab* zieht, deren Größe nach dem Maaßstabe des Hauptstraales OC bestimmt, und den Winkel φ der Tangente V*b* für den Halbmesser $\sqrt{OC^2 + OV^2}$ findet, so ist aus dem vorigen klar, daß, wenn der Winkel, den man entwerfen will, $= a$ ist, die Tangente $bam = \frac{\sqrt{OC^2 + OV^2}}{ab} \times \frac{\sin.\,(a - \varphi)}{\cos.\,a \times \cos.\,\varphi}$. Wenn $a = 65^\circ$, $\varphi = 37^\circ\ 30'$, $\sqrt{OC^2 + OV^2} = 137$, $ab = 83$, wird *bam* beynahe $66^\circ\ 15'\ 16''$.

31.

31. III. Anmerkung. Nur noch eine einzige Anmerkung muß ich über den Gebrauch der Linie AD zur Bestimmung des Punktes machen, nach welchem sich der Schatten richtet, der von einer Verticallinie auf einen schiefen Plan geworfen wird, wenn Sie von der Sonne, oder dem Monde beleuchtet wird.

Ich habe schon gemeldet, daß wenn der schiefe Plan *abcd* (8 Fig. I Taf.) bis in das unendliche, so zu sagen, verlängert würde; AD der Durchschnitt desselben mit der Sphäre seyn würde, und daß also AD einen Quadranten des Cirkels vorstelle, in dessen Plane sowohl *abcd*, als das Aug liegt, wenn es aus C, (man merke aber, daß OC auf den Plan der Tafel in O senkrecht stehe), nach V hinsieht. Einen Punkt P der Horizontallinie, auf den die Linie SP fällt, die aus dem der Sonne gerad entgegenstehenden Punkte S auf den Horizont senkrecht gezogen wird, betrachtet man in der Perspective als den Fuß des unendlich entfernten leuchtenden Körpers; und bey dieser Vorstellung liegt am Tage, daß wenn SP verlängert wird, sie von dem Plane, auf den der Schatten fällt, in T durchschnitten wird. Nun aber weiß man, daß sich der Schatten, der auf einen Plan geworfen wird, jederzeit nach jenem Punkte richtet, der der Durchschnitt des Plans, und der aus dem leuchtenden Körper auf den Horizont senkrecht fallenden Linie ist, und wird demnach dieser Punkt T nach vorgeschriebener Art sehr leicht bestimmt. 8 Fig. I Taf.

Es sey zum Beyspiele S der der Sonne gerad entgegenstehende Punkt, wenn sie vor der Tafel ist; ihre Höhe über den Horizont PS, ihr Azimuth gegen A aber OP. MN sey die Projection einer Verticallinie. Man ziehe aus P nach N die Linie PN, und aus S die Linie SM. Wenn nichts im Wege stünde, wäre der Schatten N*g*; allein da er bey *e* auf den schiefen

Plan *abcd* stößt, nimmt er von *e* seine Richtung nach T. Wenn man also aus *e* eine Linie nach T zieht, bis sie in *f* an MS stößt, hat man den ganzen Schatten der Linie MN; den Theil N*e* nämlich auf der Horizontalfläche, den Theil *ef* aber auf dem schiefen Plane *abcd*.

9 Fig. I Taf. 32. Wenn die Linie MN (9 Fig. I Taf.) auf den schiefen Plan *abcd* senkrecht steht, kann man AD als die Horizontallinie betrachten, und darauf aus S einen Perpendikel SQ ziehen. Es muß aber SQ auf AD keine wahre Perpendikulärlinie seyn, sondern nach der Perspective; und muß demnach aus einem Punkte *x*, (der wegen Enge des Raums hier nicht kann angedeutet werden) in der Verlängerung der Linie DB unter die Horizontallinie, durch S gezogen werden, also, daß B*x* die Tangente des Complements des Neigungswinkels D*d*B für den Halbmesser $\sqrt{OC^2 + OB^2}$ sey, welcher Punkt *x* der Accidentalpunkt aller Linien ist, die auf den Plan *abcd*, und auf seine Verlängerung senkrecht stehen; und indem sie mit dem Plane der Tafel nicht parallel sind, auch nicht durch wahre parallelen können, entworfen werden. Diesen Accidentalpunkt *x* (8 Fig.) zu bestimmen ist nur vonnöthen VO zu verlängern, bis sie an DB stößt. Der Fuß also des leuchtenden Körpers wird Q seyn, aus dem man QN zieht, dann auch SM, welche Linien sich in *e* schneiden, und N*e* wird den Schatten vorstellen, der von MN auf den schiefen Plan *abcd* geworfen wird. Allein mein Absehen war nicht von dem Schatten zu handeln, sondern nur von dem Gebrauche der Tangenten, der in einigen Fällen beschwerlich scheint.

33. **Vorrichtung für eine andere graphische Methode.**

Noch

Noch eine graphische Methode große Winkel nach der Perspective zu bestimmen, will ich anführen, die besonders in einigen Fällen nützlich seyn kann, wenn es auf ein, oder ein Paar Punkte ankömmt; wären aber derer viele, so würde sie, wenn man sich ihrer bedienen wollte, zu beschwerlich fallen. Der Hauptumstand aber, für den sie kann empfohlen werden, ist, wenn der Augpunkt O (10 Fig. II Taf.) um vieles näher bey dem einen Rande der Tafel BK, als bey dem andern AL liegt. Der Hauptstraal sey OC. Man verlangt die Tangente O*g* eines Winkels OC*g*, welche auf der Tafel nicht Raum hat. Man mache mit dem Transporteur den Winkel OCD, daß CD den Rand in D schneide, ziehe CK mit der Horizontallinie parallel; übertrage KD aus C in E in die Verticallinie, und aus E noch einmal in F, daß CF = 2KD werde; aus D ziehe man durch F die Linie DFG, und bemerke in der Horizontallinie den Punkt G. Es ist klar, daß die Dreyecke BD*g*, BDG, wie auch CDK, EDF gleich, und ähnlich sind, mithin B*g* = BG. Wenn also aus einem Perspectivpunkte P nach *g* sollte eine Linie gezogen werden, kömmt es nur darauf an, daß man auf dem Rande BK einen Punkt M finde, aus welchem, wenn nach G eine Linie gezogen würde, die Dreyecke BMG, BM*g* gleich, und ähnlich wären. Man mache PN mit der Horizontallinie parallel, so ist klar, daß die Dreyecke PMN, GMB ähnlich sind, und daß folglich PM : MG = PN : GB = NM : MB seyn müße. Diese Vorrichtung vorausgesetzt, sey die 10 Fig. II Taf.

34. XI. Aufgabe. AB ist die Horizontallinie, O der Augpunkt (11 Fig. II Taf.), OC der Hauptstraal, P ein gegebener Perspectivpunkt; man verlangt aus P eine Linie zu ziehen, die mit OP einen Winkel mache, 11 Fig. II Taf.

dessen Tangente aus O nicht kann in die Horizontallinie gegen B aufgetragen werden; zum Beyspiele von 67°.

Auflösung. Man mache den Winkel OCD = 67°; KD übertrage man in CE, und EF; durch F ziehe man aus D die Linie DFG. Man ziehe PN mit GB parallel, verbinde G mit P, und beschreibe aus G mit dem Halbmesser GB einen Bogen BS, wie auch aus P mit dem Halbmesser PN einen andern NR, der den vorigen in I schneide. Aus I ziehe man IG, IP; theile den Winkel GIP durch die Linie IL gleich ab, und ziehe LM mit AB parallel. Die Linie PM wird mit OP den verlangten Winkel machen. Denn da IL den Winkel GIP gleich abtheilet, ist klar, daß IG : IP = GL = LP; es ist aber GI = GB, und PI = PN; und indem LM mit BG parallel ist, ist auch GL : LP = BM : MN; folglich GB : PN = BM : MN, und wenn aus M nach G eine Linie gezogen würde, wären die Dreyecke PMN, GMB vollkommen ähnlich; und PM hat nach der angeführten Vorrichtung die erforderte Lage. W. zu bew. w.

35. I. Anmerkung. Bey dieser Methode kann man alle Vortheile gebrauchen, die wir sonst angeführt

12 Fig. II Taf. haben. Zum Beyspiele die Tafel HVKT (12 Fig. II Taf.) sey kleiner, als daß man BG in die Horizontallinie aus B übertragen könnte, wenn man für den Halbmesser den gegebenen Hauptstraal OC annähme. Man nehme also für diesen O*c* so groß, als es der Raum gestattet. Aus dem Augpunkte O übertrage man in OQ die Hälfte des gegebenen, und O*q* die Hälfte des angenommenen Hauptstraales O*c*, ziehe BQ, und *bq* mit BQ parallel. Aus *b* ziehe man auch *bk* mit O*c* parallel, und mache mit dem Transporteur den Winkel O*c*D dem gegebenen gleich. Aus *c* übertrage man in die Verticallinie *c*F = 2*k*D, und ziehe aus D durch

F

F die Linie DFA, so wird A der dem G entsprechende Punkt für den Halbmesser Oc seyn. Den gegebenen Perspectivpunkt P verbinde man mit O, und mache QP, *gp* parallel. Mit dem Punkte *p* verfährt man eben so, wie mit P in der Aufgabe. Man zieht nämlich *pn* mit AB parallel, beschreibt aus A und *p* mit den Halbmessern A*b*, *pn* die Bögen *bs*, *nr*, die sich in I schneiden, theilet den Winkel AI*p* durch IL gleich ab, zieht L*m* mit der Horizontallinie parallel, wie auch *pm*; die Linie PM mit *pm* parallel giebt den perspectivischen Winkel OPM. Die Aehnlichkeit der hier vorkommenden Dreyecke mit jenen, die man durch den Gebrauch des gegebenen Halbmessers OC bekäme, zeigt die Richtigkeit dieses Verfahrens.

36. II. **Anmerkung.** Was die in einem Verticalplane liegenden Winkel betrifft, haben wir zwar davon in der V bis VIII Aufgabe gehandelt. Allein es wird sehr oft verlangt, daß auch die gegebene Länge einer dergleichen schiefen Linie entworfen werde; und obschon dieses auf eben die Art geschieht, der man sich bey einem mit dem Horizonte parallelen Plane gebraucht, nach der VIII Aufgabe des **Herrn de la Caille** (399), so kann es doch den Anfängern nicht unangenehm seyn, wenn wir die Anwendung auf Verticalplane hieher setzen.

37. XII. **Aufgabe.** Die in den Theilen des Hauptstraals gegebene Länge einer Linie zu entwerfen, welche in einem Verticalplane, (dessen Azimuth gegeben wird), liegt, und unter einem gleichfalls gegebenen Winkel gegen den Horizont geneigt ist.

Auflösung. I. Wenn das Supplement des gespitzten Neigungswinkel gegen das Aug gerichtet ist. (13 Fig. II Taf.) 13 Fig. II. Taf.

Das Azimuth sey AO, der Hauptstraal OC, der Halbmesser für die Eintheilung des Verticals LM,

$AC = \sqrt{OC^2 + OA^2}$; der Neigungswinkel gegen den Horizont LPA, zum Beyspiele 30°. Durch C ziehe man DE mit der Verticallinie Oc parallel, verlängere AP bis in E; aus E übertrage man in den Theilen des Halbmessers AC die Größe der schiefen Linie PQ, nämlich ED, ziehe AD, und mache PF mit ED parallel, so wird FP eine nach der Perspective mit DE gleichgroße Verticallinie seyn. Damit nun PQ mit FP gleich werde, ziehe man gegen M aus F die Linie FM auf die Eintheilung 30°, daß nämlich der Winkel AFM die Hälfte des Winkels LPF werde. Denn es ist einleuchtend, daß sowohl AFP, als APF zwey rechte Winkel sind, und da LPA = 30°, ist LPF = 60°, und GF muß die Tangente des Winkels GPF vorstellen. Wenn man sich vorstellet, es werde mit dem Halbmesser PF ein Bogen FQ von 60°, (der den Winkel GPF mißt), beschrieben, so ist klar, daß der Winkel GFQ, den die Senne FQ mit der Tangente GF enthält, die Hälfte des Winkels QPF bey dem Mittelpunkte P sey. Da wir also den Winkel AFM = 30° gemacht haben, und LPF = 60°, muß QP = FP seyn.

14 Fig. II Taf. II. Wenn der gespitzte Neigungswinkel selbst gegen das Aug gerichtet ist. (14 Fig. II Taf.) In diesem Falle ziehe man wiederum durch P aus A die Linie APE, nehme ED, die Größe der schiefen Linie, in den Theilen des Halbmessers AC, und ziehe AD; PF sey mit DE parallel, so wird sie eine mit DE gleiche Verticallinie vorstellen, welcher man PQ nach der Perspective gleich zu machen sucht. Der Neigungswinkel GPE = APL gegen den Horizont sey zum Beyspiele = 40°, und da APF = 90°, ist FPG = 50°, mithin ist wegen des rechten Winkels AFP = PFG, die

Linie

Linie FG die Tangente von 50°, oder des Winkels FPG; und wenn demnach der Winkel MFA = GFQ = $\frac{1}{2}$FPQ, im gegenwärtigen Beyspiele = 25°, gemacht wird, muß PQ dem Halbmesser PF gleich seyn, das ist, PQ muß die gegebene Länge DE haben.

38. I. **Anmerkung.** Man wird aus diesem leicht erkennen, wie man die wahre Länge einer Perspectivlinie PQ (13, 14 Figur II Taf.) in den Theilen des Hauptstraals O*c* finden könne, wenn das Azimuth OA, der Augpunkt O, der Hauptstraal O*c*, und der Neigungswinkel bekannt sind, ja wie man auch diesen finden könne. Ich will setzen, es werde nichts, als der Entwurf QP sammt dem Azimuthe und Hauptstraale gegeben. Man ziehe erstens AP; dann verlängere man PQ, bis sie LAM irgendwo in L schneide. Man nehme AC = $\sqrt{AO^2 + Oc^2}$, und übertrage sie in AC in der Horizontallinie. PF mache man mit O*c* parallel, messe mit dem Transporteur den Winkel LCA = LPA, bestimme für den Halbmesser AC die Tangente AM der Hälfte des Complements des Neigungswinkels LCA, und ziehe aus M durch Q die Linie MQF (oder MFQ), daß sie die Verticallinie PF in F schneide. Endlich mache man DCE mit O*c* parallel, ziehe AFD, und verlängere AP in E, so hat man die Objectivlänge DE der Linie PQ in den Theilen des Halbmessers AC, mithin auch in den Theilen des Hauptstraals O*c*. 13, 14 Fig. II Taf.

39. II. **Anmerkung.** Die Anwendung der Aufgabe auf einen Plan, der sowohl gegen den Horizont, als gegen den Meridian des Auges geneigt ist, kann nicht schwer seyn. Man verlangt zum Beyspiele auf den Plan KEFH (6 Fig. I Taf.) eine Linie *ba* aus dem Perspectivpunkte *b* zu ziehen, die mit der gegebenen *cb* einen gleichfalls gegebenen Winkel macht, und die in den 6 Fig. I Taf.

Thei-

Theilen des für AD bekannten Halbmessers VR gegebene Länge hat. Man mache RN mit AD parallel. Aus V ziehe man durch *b* die Linie V*b*M, und übertrage aus M in N die gegebene Größe der verlangten Linie *ba*; dann ziehe man aus N die Linie NV. Wenn man *bd* mit RN, oder AD parallel macht, wird *bd* mit MN nach der Perspective gleich seyn. Man mache den Winkel Q*bc* dem gegebenen gleich, zum Beyspiele 75°, also, daß Q*b*V = 55°, so wird Q*bd* dem Complemente gleich seyn, nämlich 35°, dessen Hälfte = 17° 30′. Man nehme demnach V*g* = *tang.* (17° 30′) für den Halbmesser VR gerechnet, und ziehe *dg*, so wird diese von *b*Q den gesuchten Theil *ba* abschneiden, (wie es aus der Ausgabe einleuchtend ist), welcher nach der Perspective mit *bd* gleich ist.

40. III. Anmerkuug. In der III Anmerkung über die X Aufgabe habe ich gesagt, der Accidentalpunkt x
8 Fig. I Taf. (8 Fig. I Taf.) werde durch die Verlängerung der Linie VO bestimmt, bis sie in x die gleichfalls verlängerte Linie DB schneide. Sowohl aus der V als X Aufgabe ist klar, daß der Halbmesser für die Eintheilung der Linie DBx, $\sqrt{OC^2 + OB^2}$ seyn müße, und $\sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{DB \times Bx}$. Die ähnlichen Dreyecke xVD, xBO geben $xD : Vx = Ox : Bx$, mithin ist $Bx = \frac{Vx \times Ox}{Dx}$, und $BD = \frac{Dx^2 - Vx \times Ox}{Dx}$, $BD \times Bx = \frac{(Dx^2 - Vx \times Ox)}{Dx} \frac{Vx \times Ox}{Dx} = Vx \times Ox - \frac{Vx^2 \times Ox^2}{Dx^2} = Ox\,(VO + Ox) - Bx^2 = Ox \times VO + Ox^2 - Bx^2 = Ox \times VO + OB^2$. Wenn man die Punkte A und x verbände, und

auf

auf den Halbmesser Ax einen Halbcirkel beschriebe, würde er nothwendig durch V und B gehen, indem AVx, ABx rechte Winkel sind. Es muß also AO × OB = VO × Ox seyn; man weiß aber, daß AO × OB = OC², folglich ist auch Ox × VO + OB² = OC² + OB², welches nicht unmöglich wäre, wenn nicht BD, Bx die Tangenten zweyer Winkel nach dem Halbmesser $\sqrt{OC^2+OB^2}$ gerechnet wären, die zusammen 90 Grade geben. Ich habe diesen Beweis hieher gesetzt, damit ihn auch kein Anfänger von mir zu fordern habe.

41. IV. Anmerkung. Der Maaßstab der abwachsenden Längen, den man auf beyden Seitenränden der Tafel anbringt, kann auch seine Dienste thun, wenn große Winkel zu entwerfen sind, deren Tangenten nicht können aufgetragen werden. Wir wollen diese Auflösung des VI Problems bey de la Caille (394) auf den II Fall der XII Aufgabe anwenden. Man verlangt in einem Verticalplane, dessen Azimuth OA (15 Fig. II Taf.), aus dem Perspectivpunkte P eine Linie PQ zu ziehen, die mit der Linie AP einen Winkel von 60° gegen das Aug macht, und die in dem Maaßstabe des Halbmessers AC für das gegebene Azimuth die gleichfalls gegebene Länge hat. Durch P ziehe man aus A die Linie APE, übertrage aus E in D, wie in der Aufgabe, die gegebene Länge ED; ziehe AD, und mache PF mit DE parallel. Man verlängere PF in f, damit Pf = PF werde. Auf einem besonderen Papiere mache man ein rechtwinklichtes Dreyeck mcn, dessen eine Seite cn mit DE gleich sey, und mit der Hypotenuse den Winkel mnc enthalte, welcher das Complement des Neigungswinkels ist, oder = 30° im unsern Beyspiele. Die Linie cm übertrage man in CM, wie auch AC in Aa, und ziehe MA, die Ff in h schneide, wie auch aus a 15 Fig. II Taf.

nach

nach *h* eine Linie, die AC in *i* schneide; gleichfalls ziehe man A*f*, und durch *i* eine Linie *ig* mit *a*AN parallel, welche A*f* in *g* durchschneidet. Wenn man durch *g* und P eine Linie *g*PG zieht, so wird diese unter einem Winkel von 60° gegen den Horizont geneigt seyn. Aus L (es ist AL die Tangente des $\frac{1}{2}mnc$ nach dem Halbmesser AC) ziehe man endlich durch F die Linie LFQ, so wird PQ auch die gegebene Länge haben.

Was die Länge betrifft, haben wir schon in der Aufgabe gesagt; daß aber QP auch die gehörige Neigung habe, wird man leicht daraus ersehen, daß *g*P*f* nichts anders, als die Projection des Dreyeckes *mcn* ist, und *fg* die Tangente von 30° nach dem Halbmesser *cn*; da aber A*f*P einen rechten Winkel vorstellet, muß P*gf* = QPE (denn A*f*, AE sind nach der Perspective parallel) einen Winkel von 60° entwerfen.

42. Wenn man die Linie FP nicht verlängeren will, oder dieses der Raum nicht zuläßt, kann man anstatt der Tangente *gf* die Tangente GF auf folgende Art bestimmen. Die gegebene Neigung gegen den Horizont der Linie PQ (14 Fig. II Taf.) sey zum Beyspiele = 40°. Nachdem man, wie in der 15ten Figur, ein rechtwinklichtes Dreyeck *mcn*, dessen Winkel *n* dem Complemente von 40° gleich, mithin = 50°, mit dem Halbmesser DE beschrieben, übertrage man *mc* in CN, ziehe AN, durch welche die verlängerte Linie FP in *h* geschnitten wird, und es wird *rh* mit CN nach der Perspective gleich seyn. Man übertrage auch AC in A*a*, und ziehe aus *a* durch *r*, (allwo FP durch die Horizontallinie geht), eine Linie, bis sie AN in *g* schneide; aus *g* mache man *gi*G mit der Verticallinie parallel, und ziehe GP, so wird diese gegen das Aug einen Winkel von 40° mit AP machen. Denn da *rh* in dem abwachsenden Breitenmaaßstabe der Tangente CN gleich

14 Fig. II Taf.

ist,

ist, sind auch mit ihr *ri*, FG, *hg* in dem Längenmaaßstabe gleich, und PFG*f* stellet ein rechtwinklichtes Viereck vor, PG die Diagonale, allwo der Winkel FPG = 50°, folglich sein Complement GP*f* = 40°. Die Länge PQ wird wie zuvor bestimmt, wenn man AM, die Tangente von 25°, oder die Hälfte des Complements des Neigungswinkels nimmt, und MFQ zieht.

43. Allgemeine Anmerkung. Obschon alle die Methoden ihre Nutzbarkeit haben, wenn es um wenige Winkel, oder Linien zu thun ist, so sehe ich doch wohl ein, daß die Zeichnung ungemein beschwerlich seyn würde, wenn man sich auch dazumal daran halten müßte, wenn dergleichen Punkte, die man auf die Tafel nicht auftragen kann, Accidentalpunkte sehr vieler Parallellinien wären, gleichwie es sich zuträgt, wenn ganze Gebäude nach der Perspective entworfen werden. In solchen Fällen kann man sich anderer Vortheile bedienen, welche den Mangel des Raums eines mittelmäßigen Zeichnungs- oder Reißbrettes ersetzen. Wenn man zum Beyspiele den Rand des Brettes ABCD (16 Fig. II Taf.) mit einem tiefen Falze, oder Höhlung versehen läßt, daß man darinnen nach Belieben ein Lineal MPQN einsetzen, und mit einem Paar Zapfen an dem Orte befestigen könne, allwo die Horizontallinie *hr* über das Brett hinauslaufen sollte, so wird dieses eben die Dienste thun, die man von einer Breite *h*P erwarten kann. Wenn die Rände AB, CD eben so eingerichtet werden, wird eben dieses Lineal für die größeren Tangenten dienen, die man in die Verticallinien sonst nicht würde auftragen können. 16 Fig. II Taf.

44. Sollten die Umstände auch diesen kleinen Kunstgriff verbieten, so kann doch die Geometrie, obschon nicht ohne Zeitverlust ihn einiger Maaßen ersetzen. Man setze (17 Fig. III Taf.), aus den gegebenen Perspectiv- 17 Fig. III Taf.

punk-

punkten A, B, D, E, F, und G sollen nach einer Eintheilung X, die auf die Tafel nach dem Hauptstraale OC nicht kann aufgetragen werden, Linien gezogen werden. Man suche entweder nach der I, oder nach der III Aufgabe für den höchsten Punkt A, und für den niedrigsten G die Linien A*a*X, G*h*X, die den Seitenrand TR, welcher mit der Verticallinie OC parallel angenommen wird, in *a* und *h* schneiden. Aus A ziehe man AH mit OC parallel, und verlängere G*h* in H; Dann mache man *ab* mit AB, *ad* mit AD, *ae* mit AE, u. s. f. parallel, also, daß immer stehe AH : AB = *ah* : *ab*; AH : AD = *ah* : *ad*; AH : AE = *ah* : *ae*, u. s. f. Wenn man B*b*, D*d*, E*e*, F*f* zieht, werden alle diese Linien nach dem Accidentalpunkte X gerichtet seyn. Denn es ist einleuchtend, daß wenn man die Linien AX, BX, DX, EX . . . . HX wirklich zöge, die Dreyecke ABX, *ab*X; ADX, *ad*X; AEX, *ae*X ꝛc. ähnlich seyn würden, mithin A*a*, B*b*, D*d* ꝛc. in dem Punkte X zusammen stossen würden.

Wären die gegebenen Perspectivpunkte in einer Verticallinie $\alpha\gamma$, könnte man wieder αa, γh nach den angeführten Aufgaben bestimmen, und die Linie *ah* in eben dem Verhältniße in *m*, *n*, *o*, *p* eintheilen, in dem die Theile $\alpha\beta$, $\beta\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\phi$, $\phi\gamma$ stehen. Wäre die Linie αV nicht vertical, sondern schief, in welcher die Perspectivpunkten liegen, so müßte man aus *a*, allwo αX den Seitenrand schneidet, *a*5 mit αV parallel ziehen, und nach gezogenen V5 müßte *a*5 in 1, 2, 3 ꝛc. eben also eingetheilet werden, wie αV in I, II, III ꝛc.

45. Man kann dieses auch auf folgende Art bewirken, und es bleibt der nämliche Grund. A, B, D, E ꝛc.
18 Fig. III Taf. (18 Fig. III Taf.) seyen die gegebenen Perspectivpunkte, aus denen man nach X Linien ziehen soll; TR sey der Seitenrand. Man bestimme wiederum nach der I oder

III

III Aufgabe die Linien AαX, BβX, und mache A𝔅 mit OC oder TR parallel. Man ziehe aus *a*, allwo AX den Seitenrand schneidet, *ab* mit AB parallel. Auf einem besonderen Papiere ziehe man AM, AN (19 Fig. III Taf.) unter einem beliebigen Winkel, und übertrage A𝔅 der vorigen Figur in die Seite AN aus A in B, wie auch αβ aus A in *b* in der Linie AM. Dann mache man in der 18 Figur *bd* mit BD parallel, übertrage BD in die 19 Figur aus A in D, ziehe D*d* mit B*b* parallel, nehme mit den Sirkel A*d*, und mache mit ihr *bd* in der 18 Figur gleich. Eben also zieht man DE, überträgt sie in AN der 19 Figur aus A in E, zieht E*e* mit B*b* parallel, und macht *de* in der 18 Fig. (es ist *de* mit DE parallel) gleich. Die Linien A*a*, B*b*, D*d*, E*e* ꝛc. müßen in dem nämlichen Punkte X zusammen stossen. Denn vermög der Vorrichtung steht $AX : aX = AB : ab = A\mathfrak{B} : a\beta = DB : db = DE : de = EX : eX = DX : dX = BX : bX = AX : aX$.

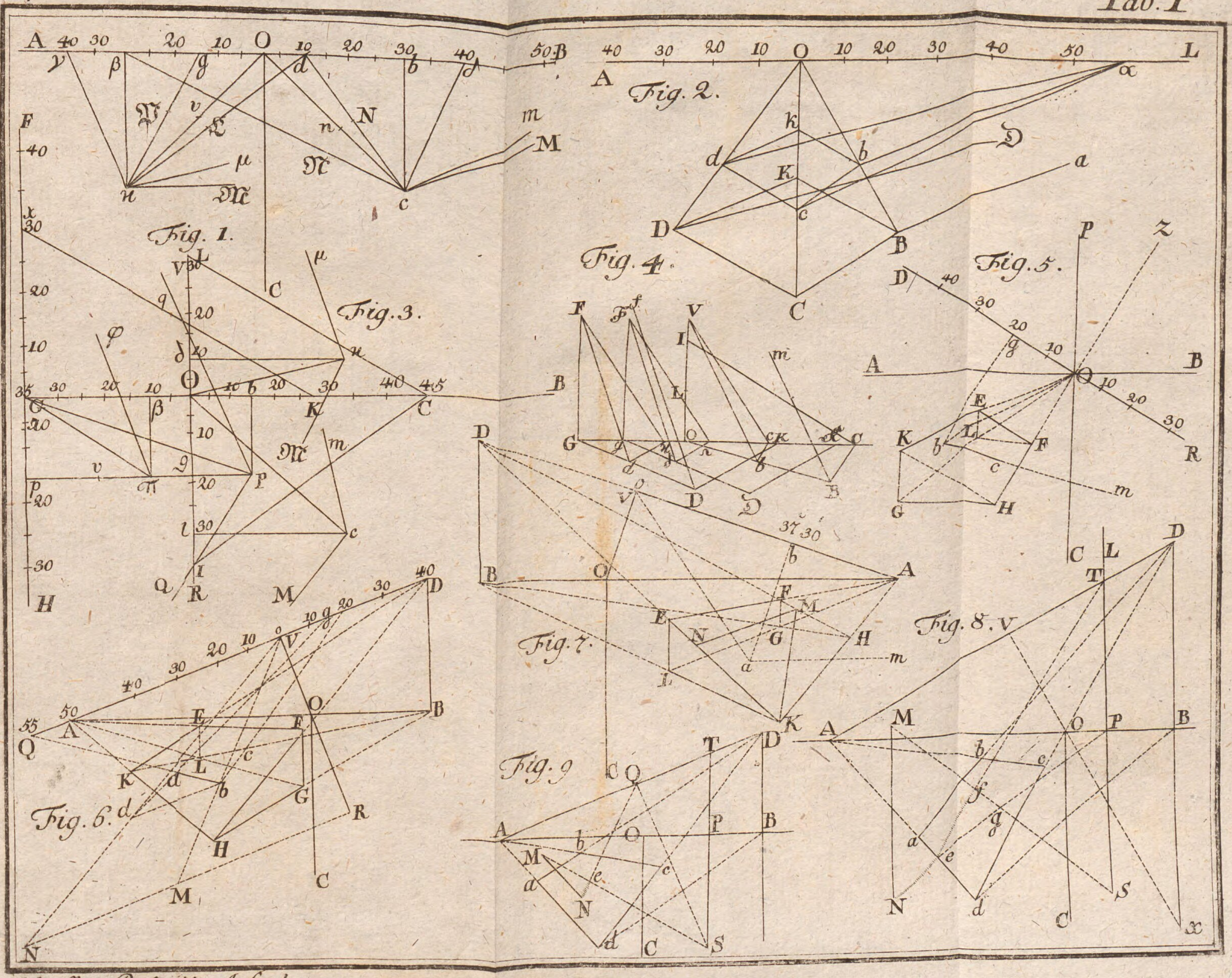
19 Fig. III Taf.

18 Fig. III Taf.

Aus diesem ersieht man, daß es nur auf zwey Linien ankomme, derer Richtung im Anfange zu bestimmen ist; alle übrigen können hernach ohne besondere Beschwerde gezogen werden.

Erheblichere Druckfehler.

Seite	Zeile	Anstatt	Lies
34	8	$\frac{2a^2 \sin. \varrho\, (\sin. \frac{1}{2}\omega)^2}{b \sin. \varrho \times \cos. \omega}$	$\frac{2a^2 \sin. \varrho\, (\sin. \frac{1}{2}\omega)^2}{b \sin. \varphi \times \cos. \omega}$
—	18	$32^{\circ}\ 21'',6$	$32'\ 21'',6$
46	20	den . . .	dem
47	3	Setze hinzu: Wenn der Plan dieses Bogens durch den Mittelpunkt der Sphäroide gienge, würde er nach dieser Berechnungsart um 231,305 Klafter länger.	
57	1	MF . . .	NF
83	16	KS . . .	$K\sigma$
88	22	in den . .	in dem
113	10	auf . . .	aus
158	22	diesen . .	diesem
177	29 u. 33	$(7^{\circ}\ 5'\ 6'')$.	$(7^{\circ}\ 3'\ 6'')$
178	1	0,019676 .	0,0195879
—	6	0,009838 .	0,0097939



Scherffers Perspectiv. Aufgab.

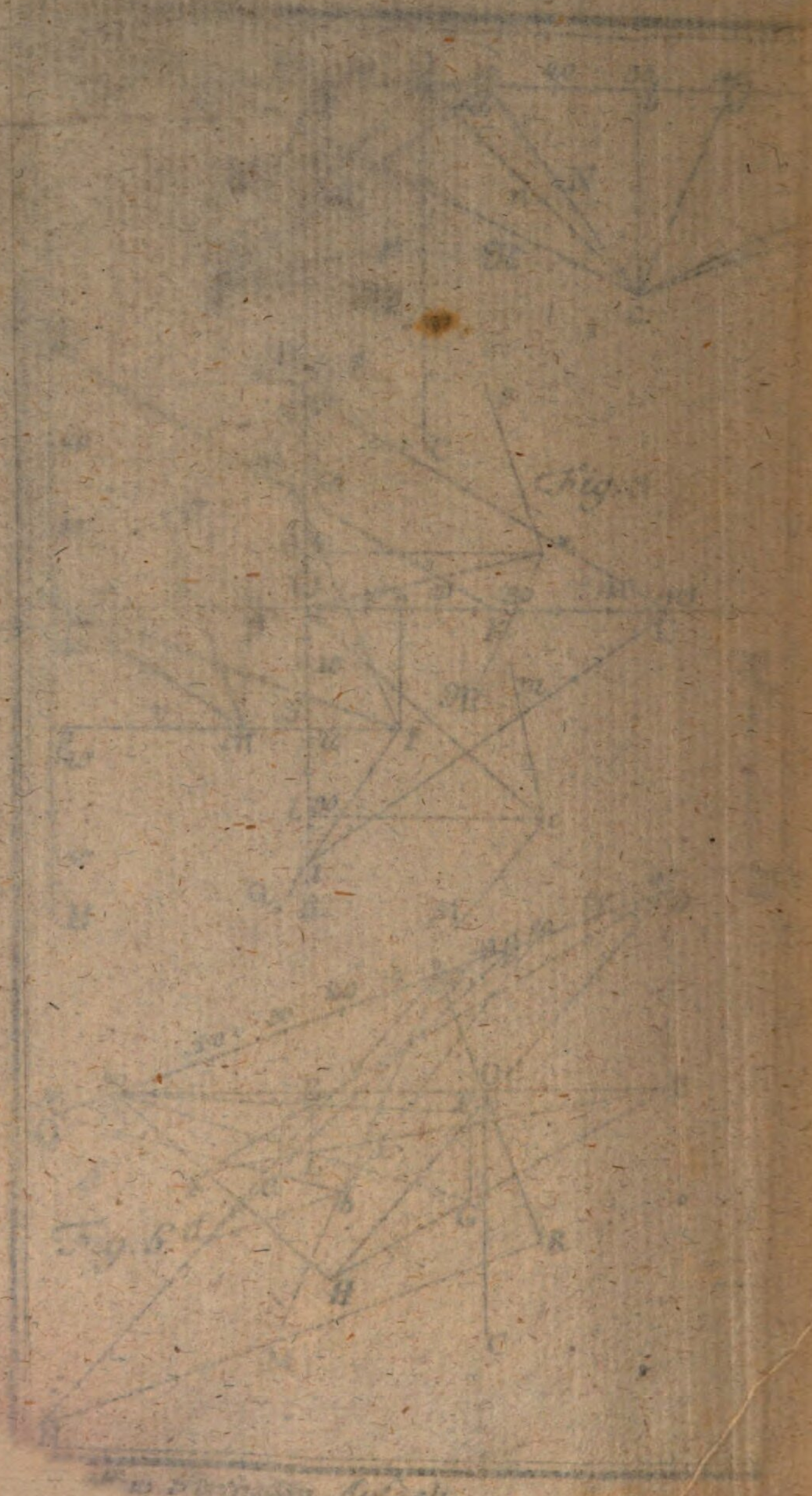
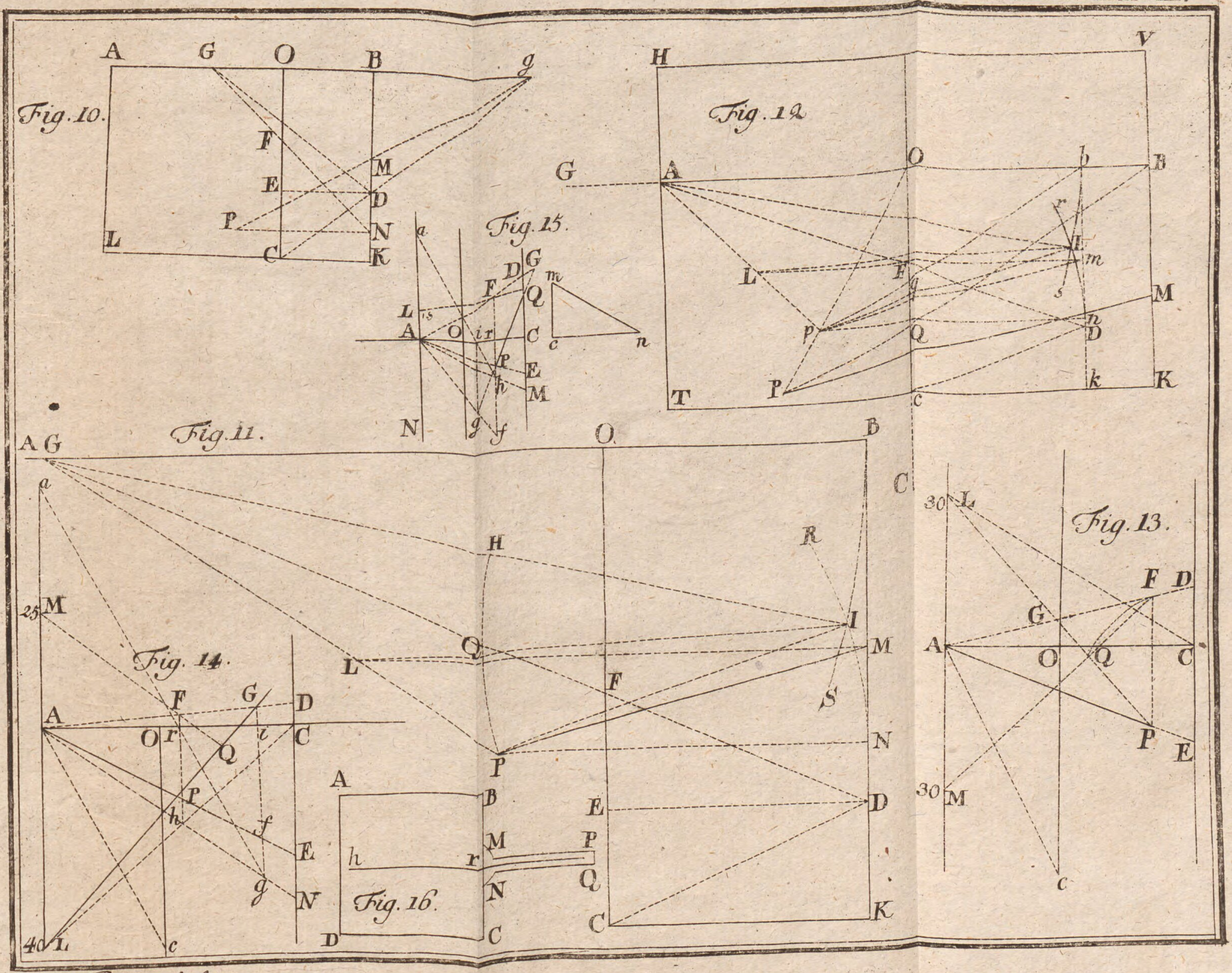
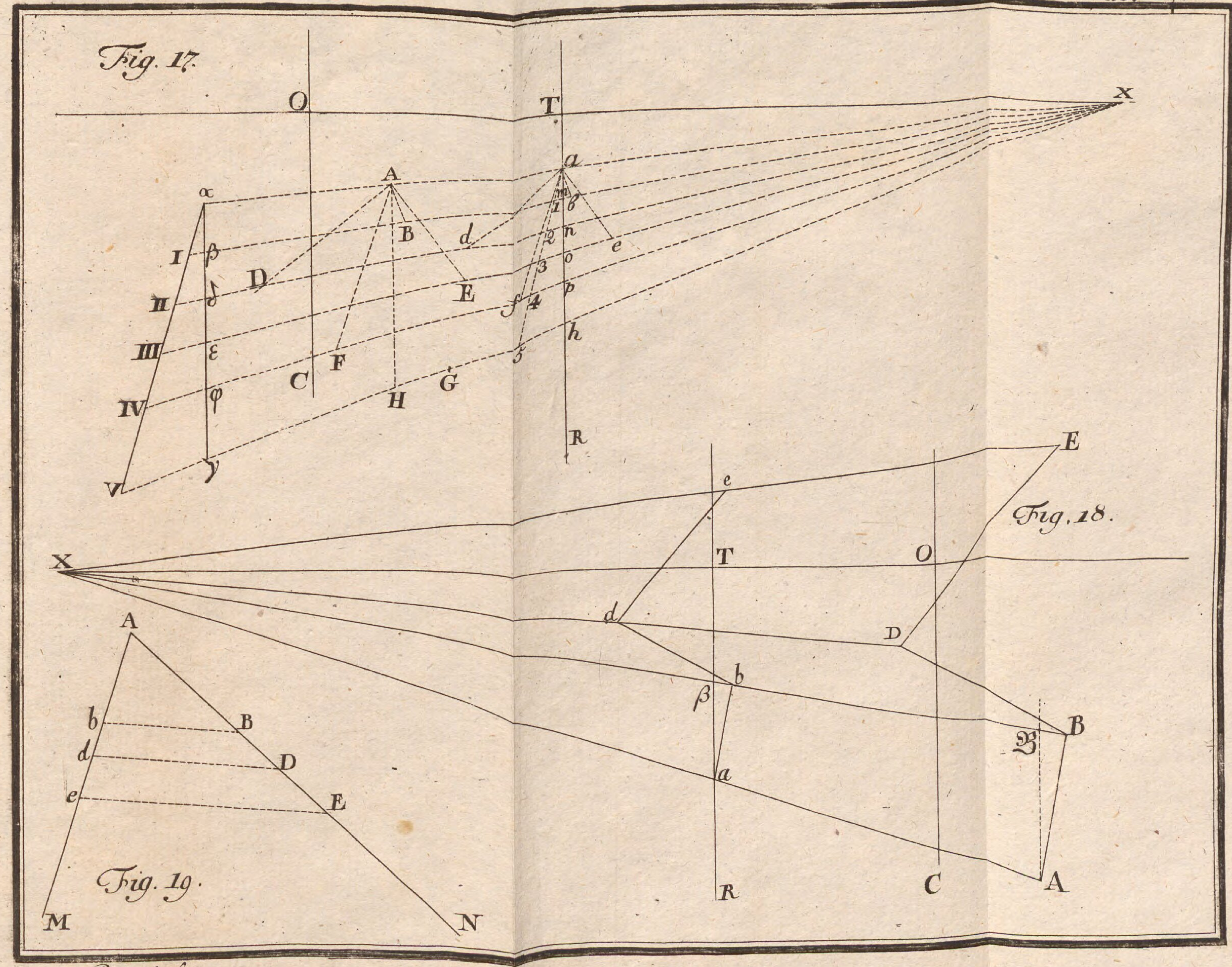


Fig. 8
Fig. 6



Scherf. Persp. Auf.

Tab. III.



Scherf. Persp. Auf.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Scherffer, Karl,

Beyträge zur Mathematik

Wien 1781

Math.u. 176
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594266-0
VD18 14586959-001